

高校物理から始める水鉄砲の力学

BV19070 小宅 宇海

2021年6月4日

目次

1	研究背景	3
2	研究目的	3
3	各種文字についての定義	3
4	流体力学の基本公式について	3
4.1	連続の式について	3
4.2	ベルヌーイの定理について	4
5	水鉄砲の解析	5
5.1	竹水鉄砲タイプ	5
5.2	安い水鉄砲タイプ	6
5.3	高級水鉄砲タイプ	7
6	考察	8
6.1	表面張力	8
6.2	表面張力による条件	9
7	まとめ	9
8	今後の展望	9

1 研究背景

数理科学は小難しいなどのイメージがあり、とっつきにくいジャンルである。そのため、少しでも興味を持ってもらえるような研究がしたいと思った。そこでこれから夏がやってくるということもあり、水鉄砲に注目することにした。

2 研究目的

水鉄砲の仕組みを解析することで、より速く水が飛ぶ水鉄砲を考える。また、この仕組みをシャワーなどに活かして、自在に速度を操れるようにする。

3 各種文字についての定義

本研究において次にあげる文字は次のような意味を持つ。

- v :流速 (velocity)
- ρ :密度 (英語は density だが慣例的にギリシャ文字の ρ (ロー) が使われる)
- h :基準面からの高さ (height)
- g :重力加速度 (gravitational acceleration)
- P :圧力 (pressuer)
- A :断面積 (area)
- F :力 (force)

4 流体力学の基本公式について

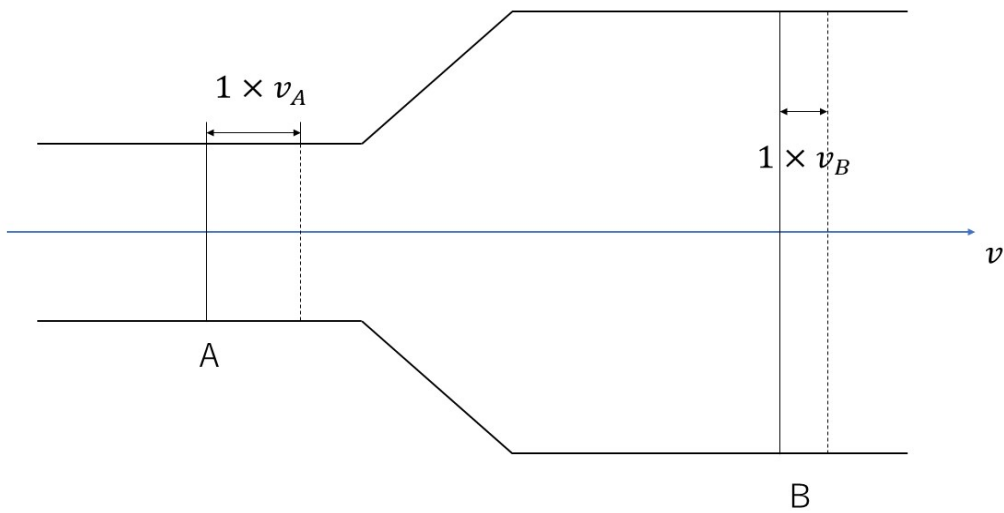
本研究では以下の公式を用いて研究を行う。

$$Av = const.$$
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + P = const.$$

上の式は連続の式と呼ばれ、下の式はベルヌーイ (Bernoulli) の定理と呼ばれている。これらの式について簡単な (\neq 厳密) 証明を行う。

4.1 連続の式について

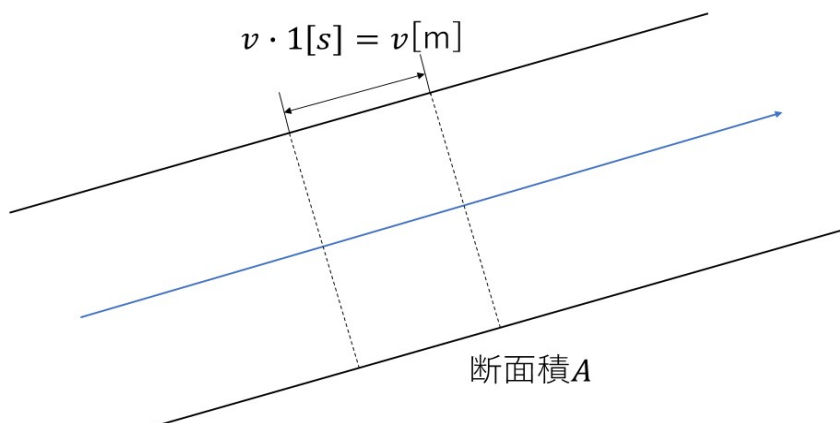
以下のような図を考える。



上の管路では流体が左から右に流れている。断面 A での断面積と速度を A_A, v_A , 断面 B での断面積と速度を A_B, v_B とする。1 秒あたりに流体は 1 秒 \times 速度進むので、1 秒あたりに断面 A を通過する流体の体積は $1 \cdot v_A \cdot A_A$, B の方も同様に $1 \cdot v_B \cdot A_B$ である。出てくる量は同じなので、 $A_A v_A = A_B v_B$ が成り立つ。したがって $Av = \text{const}$ が成り立つ。両辺に密度をかけると流体力学における質量保存の法則のようなものになる。

4.2 ベルヌーイの定理について

以下のような図を考える。



管路内での 1 秒あたりのエネルギー変化を考えてみる。運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$, 位置エ

エネルギーは mgh である。また流体は圧力による仕事を受けるのでその仕事は $W = Fx$ である。ここで、力 F は、圧力と面積を用いて $F = PA$ と表せられる。さらに1秒あたりの移動距離は v であるので、仕事は $W = PAv$ である。さらに、質量 m は体積と密度の積であるので、 $m = Av\rho$ である。これらを組み合わせると、

$$\frac{1}{2}(Av\rho)v^2 + (Av\rho)gh + PAv = const$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + P = const$$

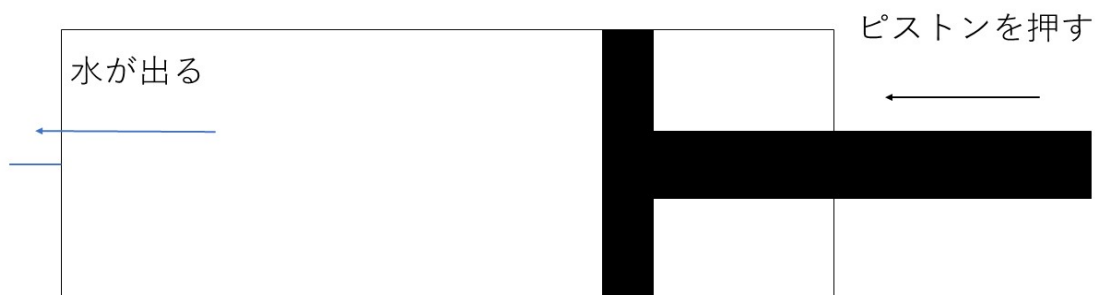
となる。これは流体力学におけるエネルギー保存則のようなものである。

5 水鉄砲の解析

今回、水鉄砲として3つのタイプを考えた。それらは、竹水鉄砲タイプ、安い水鉄砲タイプ、高級水鉄砲タイプの三種類である。竹水鉄砲タイプは、筒の中に水を入れそれをピストンで押し出すものである。安い水鉄砲タイプは100円ほどで販売されているトリガーを引くと水が発射される仕組みのものである。最後に高級水鉄砲タイプは水鉄砲についている棒を押したり引いたりすると速度が速くなるものである。この中で竹水鉄砲タイプが最も単純な構造をしているのでコレの解析から始めたいと思う。

5.1 竹水鉄砲タイプ

竹水鉄砲タイプの水鉄砲は以下のような構造をしている。



ピストンを押し出す速度を v_p , 求める流速を v_o , ピストン付近の圧力を P_p , 水が流出するところ付近の圧力を P_o , 基準面の高さ h を水が流出するところとすると、ベルヌーイの定理

より次式が成り立つ.

$$\frac{1}{2}\rho v_p^2 + \rho gh + P_p = \frac{1}{2}\rho v_o^2 + \rho gh + P_o$$

この式を v_o について整理すると,

$$v_o = \sqrt{v_p^2 + \frac{2(P_p - P_o)}{\rho}} \quad (1)$$

噴出口の半径を r , ピストンの半径を $R (R > r)$ とすると連続の式から次の式が成り立つ.

$$v_p R^2 \pi = v_o r^2 \pi$$

これを v_p について整理すると,

$$v_p = \frac{r^2}{R^2} v_o \quad (2)$$

ここで (1) に (2) を代入して整理すると

$$v_o = \sqrt{\frac{1}{1 - (r/R)^4} \frac{2(P_p - P_o)}{\rho}} \quad (3)$$

となる. ここで, P_p は大気圧と水圧とピストンを押したときに生じる圧力の一部 (噴出口があるためピストンによる圧力が全てかかるわけではない) を足し合わせたものであるので単純に $P_p - P_o = \frac{F}{R^2 \pi}$ とすることはできないことに注意する.

水を出しているホースの半径を小さくする (握る) と流速が大きくなるということを経験したことがある人も多いと思う. しかし, この式は噴出口が小さくなると流速も小さくなるという経験に反した式になっている. 経験と反している理由は我々が日常生活での経験を誤解して認識しているからである. 同じ力で異なる半径の噴出口の竹水鉄砲で水を発射することを考える. 同じ力をかけても噴出口が小さい方の竹水鉄砲は圧力の逃げ道が小さいため水による反発力が大きくなる. そのため, もう一方の竹水鉄砲より力が少なく伝わると考えられる. そのため, この式は現実の現象を記述できているといえる. ではなぜ我々が誤認するかというと, 小さい穴から出た水に当たると痛く感じるからである. なぜなら穴が小さいためかかる圧力が大きくなるためである.

5.2 安い水鉄砲タイプ

これは以下のような構造をしている.

水が出る



この仕組みはトリガー (ピストン) を押して、管路の空気を押し出し真空となったところに水が吸い寄せられるというのを繰り返し、管路内を水で満たす。そして、ピストンで水を押し出すという先ほどの竹水鉄砲タイプとあまり変わらない構造をしている。

このタイプの水鉄砲は管路が曲がっているが、今回は粘性を考えないため損失は無視する。連続の式より (2) 式が成り立つ。また、基準面をトリガー部分とし、噴出口までの高さを h とするとベルヌーイの定理より次が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\rho v_o^2 + \rho gh + P_o = \frac{1}{2}\rho v_p^2 + P_p$$

この式を (2) を代入して整理すると、

$$v_o = \sqrt{\frac{1}{1 - (r/R)^4} \frac{2(P_p - P_o)}{\rho} - 2gh} \quad (4)$$

(3) 式と比べて高さがある分減速している。トリガーと噴出口の位置関係が逆なら速くなっていた。

5.3 高級水鉄砲タイプ

このタイプの水鉄砲は基本的な構造は安い水鉄砲タイプと同じだが、大きく違う点として加圧できる点がある。そのため、式自体は (4) 式と同じだが、 P_p が大気圧、水圧、ピストンによる圧力に加えて棒の押し引きによって加えた圧力になっている。このこと以外は安い水鉄砲タイプと全く変わらないと思われる。

6 考察

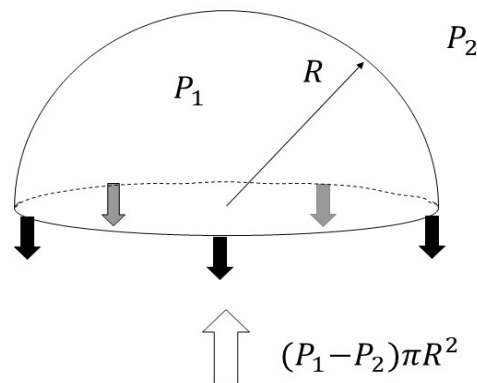
(3) 式に注目する. この式は噴出口の半径 r がピストンの半径 R に近づくと速度が無限大に発散するという式になっている.

$$\lim_{r \rightarrow R} \sqrt{\frac{1}{1 - (r/R)^4} \frac{2(P_p - P_o)}{\rho}} = \infty$$

現実的に考えて, 速度が無限ということはあり得ない. そのため, $r \ll R$ という条件下でのみこの式を使うことができる. これは安い水鉄砲タイプと高級水鉄砲タイプでも同様である. しかし, 竹水鉄砲タイプにはさらに条件を加えることができる. 安い水鉄砲タイプと高級水鉄砲タイプは噴出口から水があふれないようにする弁のようなものがついていることが多い. しかし, 竹水鉄砲タイプにはついていない. そのため水の漏れを防ぐためにちょっとした工夫が必要である. そこで表面張力を利用する.

6.1 表面張力

表面張力とはコップにあふれるくらい液体を入れても溢れない時や葉っぱの上の露が下のよう形をしているに見ることができるものである. 膜を張るための張力で, 単位は $[\text{N}/\text{m}]$, つまり単位長さ当たりの力である. 一般的に表面張力を表す文字として σ が使われる.



上の図のようなとき, 表面張力によって液滴が縮もうとするので, $P_1 > P_2$ である. また, 液滴内外の圧力差による力と表面張力による力が釣り合うので以下の式が成り立つ.

$$(P_1 - P_2)\pi R^2 = 2\pi R\sigma$$

よって,

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{R} \quad (5)$$

が成り立つ.

6.2 表面張力による条件

(5) 式より, $R = \frac{2\sigma}{P_1 - P_2}$ が成り立つ. 半径がこれより小さいと水があふれなくなるので, 天然の蓋 (弁) のようなものを作ることができる. したがって, 噴出口の半径 r には次の条件が発生する.

$$0 < r < \frac{2\sigma}{P_p - P_o}$$

7 まとめ

- 竹水鉄砲タイプの流速は $v_o = \sqrt{\frac{1}{1-(r/R)^4} \frac{2(P_p - P_o)}{\rho}}$ である. ただし, $0 < r < \frac{2\sigma}{P_p - P_o}$
- 安い水鉄砲タイプと高級水鉄砲タイプの流速は $v_o = \sqrt{\frac{1}{1-(r/R)^4} \frac{2(P_p - P_o)}{\rho} - 2gh}$ である. ただし, $r \ll R$
- 水鉄砲の流速を速くするためには水鉄砲内の圧力を上げる必要がある.
- 水鉄砲内の圧力はピストンにける力に比例している.
- 高級水鉄砲タイプはピストンにける力だけでなく, 加圧する装置の使用回数も関わってくる.

8 今後の展望

今回, 粘性を一切考慮していないので粘性を考慮した研究や管摩擦を考慮した研究を今後行ってみたい. また, シャワーヘッドを購入できなかった (部費の申請忘れ) ので今後はこの研究を活かしてシャワーヘッドなどの仕組みを解析し肌触りの良い流速などを調べたいと思う. シミュレーションソフトを用いればさらに面白い研究ができると思うので今後それも行ってきたい.

参考文献

- [1] 流体力学 シンプルにすれば「流れ」がわかる, 金原繁他, 実教出版株式会社, 2009 年
- [2] JSME テキストシリーズ 演習 流体力学, 日本機械学会, 丸善出版株式会社, 2012 年