ネーター環

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV19035　園田　夏紀

2021 年 5 月 31 日

目 次

1　研究背景

代数学の授業を履修したことにより, 代数学への興味が高まった. だから, 今回の大宮祭の研究でネーター環について調べようと思った.

2　用語説明

群 $\cdots$ 集合 G が群であるとは, 1 つの演算

$$G \times G \to G$$
$$(a,b) \mapsto ab$$

をもち, 次の 3 つの条件が満たされていることをである.

結合法則 $(ab)c = a(bc)$

単位元の存在 ${}^{\exists}e \in G,\ s.t.\ {}^{\forall}a \in G, ae = ea = a$

逆元の存在 ${}^{\forall}a \in G, {}^{\exists}x \in G\ s.t.\ , ax = xa = e$

上の 3 つを群の公理とよぶ. 群 G においてさらに次の条件

交換法則 $ab = ba$

が満たされているとき, G は可換群 (Abel 群) であるという.

G の部分集合 $H \neq \phi$ で

${}^{\forall}a, b \in H, ab \in H$

${}^{\forall}a \in H, a^{-1} \in H(a^{-1}$ は a の逆元$)$

であるとき, H は群を成し, G の部分群という.

加群 $\cdots$ 群 G が可換群のときは, その演算を加法の形で書くことが多い. このとき, G を加群とよび, その単位元を零元とよんで, 0 で表す. また, G の元 a の逆元を $-a$ で表す. をもち, 次の 4 つの条件が満たされていることをである.

結合法則 $(a+b)+c = a+(b+c)$

単位元の存在 ${}^{\exists}0 \in G,\ s.t.\ {}^{\forall}a \in G, a+0 = 0+a = a$

逆元の存在 ${}^{\forall}a \in G, {}^{\exists}x \in G\ s.t.\ , a+(-a) = (-a)+a = 0$

交換法則 $a+b = b+a$

G の部分集合 $H \neq \phi$ で部分群の定義を満たすものを部分加群という.

左加群 $\cdots$ R を環, M を加群とし, 写像 $f : R \times M \to$ が与えられているものとする. いま, $(r, m) \in R \times M$ の f による像 rm とかくことにし, これが次の条件をみたすとき, M を R-左加群, または, R 上の左加群という. $1, r, r' \in R$, $m, m' \in M$ とする.

$r(m + m') = rm + rm'$

$(r + r')m = rm + r'm$

$(rr')m = r(r'm)$

$1m = m$

R-左加群を ${}_RM$ と表す. 同じ条件で次の条件をみたすとき, M を R-右加群, または, R 上の右加群という. $1, r, r' \in R$, $m, m' \in M$ とする.

$(m + m')r = rm + rm'$

$m(r + r') = rm + r'm$

$m(rr') = (mr)r'$

$m1 = m$

R-右加群を M_R と表す.
R が可換環のとき, 単に R-加群とよぶ.

環 $\cdots$ 集合 R が環であるとは, 加法と乗法の 2 つの演算をもち, 次の 4 つの条件が満たされていることである.

R は加法に関して加群である

乗法の結合法則 $(ab)c = a(bc)$

分配法則 $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$

単位元の存在 R の 0 と異なる元 1 で R の任意の元 x に対して, $1x = x1 = x$ を満たすものが存在する.

上の 4 つを環の公理とよぶ. 環 R においてさらに次の条件

乗法の交換法則 $ab = ba$

が満たされているとき, G は可換環であるという.

イデアル $\cdots$ 環 R の部分集合 I が次の二つの条件

1. $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$

2. $a \in I,, r \in R \Rightarrow ra \in I$

をみたすとき, I は R の左イデアルであるという. このとき $a \in I$ に対して, $-a = (-1) \cdot a \in I$ であるから, I は加法に関して R の部分か群である.

I が 1 と次の条件

3. $a \in I,, r \in R \Rightarrow ar \in I$

をみたすとき, I は R の右イデアルであるという. また, I が右イデアルかつ左イデアルであるとき, I は R の両側イデアルであるという.

R が可換環のときは左, 右, 両側などの区別は不要で, これを単にイデアルという.

R を可換環,I を R のイデアルとする. $I = aR$ を満たすような $a \in R$ が存在するとき, I は単項イデアルと呼ばれる. また, 可換環 R の任意のイデアルが単項イデアルであるとき, R は単項イデアル環であるという.

多項式環 $\cdots$ 可換環 R の元を係数とする文字 x の整式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

(ただし $a_i \in R$) を x に関する R 上の多項式という. この文字 x を不定元, または変数という.

変数 x に関する R 上の多項式全体を $R[x]$ で表す. $R[x]$ における加法と乗法を数を係数とする整式の場合と同様に次のように定義する.

$R[x]$ の元

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

に対して, 加法を次のように定義する

$$f(x) + g(x) = \Sigma_{i=0}^{l}(a_i + b_i)$$

ただし, $l = max(n, m)$ とし例えば, $n > m$ のときは $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$ とする.

乗法を次のように定義する.

$$f(x)g(x) = \Sigma_{k=0}^{m+n} a_i b_j$$

ただし, $c_k = \Sigma_{i+j=k} a_i b_j$. このとき $R[x]$ は可換環となり, x 上の多項式環という.

3 ネーター加群

R を環とし, 以下では R-左加群について考える. R-左加群 M に対し, その R-部分加群の任意の空でない集合に(包含関係に関して), 極大なものが存在するとき, ${}_RM$ は極大条件をみたす, あるいはネーター加群であるという.

また, M の R-部分加群の任意の列

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$$

に対して, ある n が存在して, $M_n = M_{n+1} = \cdots$ となるとき, M は昇鎖律をみたすという.

定理 3.1. ${}_RM$ について, 次の二つは同値である.

1. ${}_RM$ はネーター加群である

2. M の任意の R-部分加群は R-有限生成である

証明. (1) ⇒ (2)
N を M の任意の R-部分加群の列とする. R-部分加群ある集合を S とする. $N = \cup_i M_i$ とすれば, 仮定より, S の極大元 N_0 が存在する. $N_0 \subsetneq N$ とすれば, $m = N \backslash N_0$ となる元 m があり, $N_1 = N_0 \cup Rm$ とすれば $N_0 \subsetneq N_1$, $N_1 \in S$ となって N_0 の極大性に反する.　よって, $N_0 = N$ となり, ${}_N R$ は有限生成である.
(2) ⇒ (1)
$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$ を M の R-加群の例とする. $N = \cup_i M_i$ とすれば, 仮定より ${}_R N$ は有限個の元 $u_1, \cdots u_r$ で生成される, 各 u_1 を含む M_j のうち最大なものを M_n とすれば, $N = Ru_1 + \cdots + Ru_r \subset M_n$. したがって, $M_n = M_{n+1} = \cdots = N$ となり, ${}_R M$ は昇鎖律をみたす. よって ${}_R M$ はネーター加群である. □

定理 3.2. ${}_R M$ について次のことが成り立つ.

1. M の R-部分加群を N とするとき, つぎの二つは同値である.

   (a) ${}_R M$ はネーター加群である

   (b) M の任意の R-部分加群は R-有限生成である

2. $M = M_1 + \cdots + M_n$ で各 M_i が R-部分加群であるとき, つぎの二つは同値である.

   (a) ${}_R M$ はネーター加群である

   (b) 各 ${}_R M_i$ はネーター加群である

証明. 1 の 1a ⇒ 1b
定義から明らかに ${}_R N$ はネーター加群である. また ${}_R(M\backslash N)$ の R-部分加群と N を含む M の R-部分加群と 1 対 1 に対応するから, ${}_R(M\backslash N)$ もネーター加群である.
1b ⇒ 1a
$M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ を M の R-部分加群の列とする. $(M_1+N)\backslash N \subset (M_2+N)\backslash N \subset \cdots$ と $M_1 \cap N \subset M_2 \cap N \subset \cdots$ はそれぞれ $M\backslash N$ と N の R-部分加群の列で, 仮定よりある n に対して

$$M_n + N = M_{n+1} + N = \cdots, \qquad M_n \cap N = M_{n+1} \cap N = \cdots$$

となる. このとき $M_n = M_{n+1} = \cdots$ となることが, 次のように示される. これを否定して, ある $m > n$ に対して $M_n \subsetneq M_m$ とする. $u \in M_m - M_n$ とすれば, $u \in M_m + N = M_n + N$ より $u = v = w\ v \in M_n$, $w \in N$ となる. このとき, $w = u - v \in M_m \cap N = M_n \cap N$ となるから, $u \in M_n$ となり u のとりかたに矛盾する. よって ${}_R M$ は昇鎖律をみたし, ネーター加群である.

2 の 2a ⇒ 2b 明らかである.
2b ⇒ 2a
r に関する帰納法による. $\bar{M} = M\backslash M_1$, $\bar{M}_i = (M_i + M1)\backslash M_1$ とすれば, $\bar{M} = \bar{M}_2 + \cdots \bar{M}_r$ で各 ${}_R\bar{M}_i$ はネーター加群であるから帰納法の仮定により ${}_R\bar{M}$ はネーター加群, したがって 1 より ${}_R M$ はネーター加群である. □

4　ネーター環

環 R 自身を R-左加群と考えて, ${}_R R$ のがネーター加群であるとき, R は左ネーター環であるという. これは R 左イデアルについての極大条件, あるいは昇鎖律が満たされていることに他ならない.
右ネーター環も同様に定義される. また, R が可換環のときは単にネーター環とよぶ.
定理 3.1 より左ネーター環については次の定理が成り立つ.

定理 4.1. 環 R が左ネーター環であるための必要十分条件は, R の任意の左イデアルが R-有限生成であることである. 特に単項イデアル環はネーター環である.

5　ヒルベルトの基定理

次の定理をヒルベルトの基定理という.

定理 5.1. 可換ネーター環 R 上の多項式環 $R[x]$ はネーター環である. したがってそのイデアルは有限生成である.

証明. $n=1$ のとき R を $R[x]$ のイデアルとし,

$$I_i = \{r \in R | f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i\}$$

(ただし, $a_i = r$) とおけば, I_i は R は R のイデアルである. また, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_i^i \quad \in I$ とすれば, $xf_{(x)} = a_0 x + a_1^2 x + \cdots + a_i x^{i+1} \in I$ である. したがって, $a_i \in I_{i+1}$ となるから

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_i \subset \cdots$$

となり, 昇鎖律を満たす. R はネーター環だから, $I_r = I_{r+1} = \cdots$ となる r が存在する. $1 \leq i \leq r$ となる各 i に対し, I_i の R-生成元を $a_{i1}, \cdots a_{is_i} \neq 0$ とし, a_{ij} を最高次の係数とする i 次の多項式 $f_{ij}(x)$ で I に属するものを一つとる. このとき, $I = \Sigma_{i,j} R[x] f_{ij}(x)$ となること, すなわち, $f(x) \in I$ ならば $f(x) = \Sigma_{i,j} g_{ij}(x) f_{ij}(x)$ となる $g_{ij}(x) \in R[x]$ が存在することを $m = degf$ に関する帰納法で示す.

まず, $m=0$ ならば $f(x) \in I_0 = \Sigma_j R_{a_{0j}}$, $a_{0j} = f_{0j}(x)$ であるから, 明らかである.
$1 \leq m$ とし $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ とする. $m \leq r$ のときは, $a_m \in I_m = \Sigma_j R a_{mj}$ であるから $a_m = \Sigma_j c_j a_{mj}$, $c_j \in R$ と表され, $f(x) - \Sigma_j c_j f_{mj_{(x)}}$ は次数が m より小さい I の元である. したがってこれに帰納法の仮定を適用すればよい. また $r < m$ のときは $a_m \in I_m = I_r$ であるから, 上と同様にして $deg(f(x) - \Sigma_j c_j f_{rj}(x) x^{m-r}) < m$ となるような c_j があり, 帰納法が適用される. □

6　今後の課題

今回, ネーター環について調べ, ますます代数学についての関心が高まった. だから今後は形式的冪級数環や商環, 冪零元根基などの予備知識がないから今回載せられなかったものについての性質なども調べて, 理解していきたい. また, この部分だけ理解するのではなく, できるだけ多くの代数学の知識をつけてからまた改めてネーター環について考えてみたいと思った.

参考文献

[1] 永尾 汎, 代数学 (第 15 版), 朝倉書店, 1996.