四色問題〜間違いだらけの証明〜

BV21028　荒川 和也

令和 3 年 11 月 4 日

1　研究背景

数学界の中で特に難問とされる「四色問題」. それは最終的にはコンピュータによって解かれたが, 実際その問題はどれほど難しかったのか. 歴史上の数学者たちの解法を参考にし, 自らで考えて調べようと思った.

2　四色問題の定式化

四色問題とは「四色あればどんな地図も, 隣り合う国々が違う色になるよう塗り分けることができる」というものである. これをもう少し詳しくする.
「隣り合う」とは二つの国境線に沿って境を接しているものとする. つまり, 一点だけ接しているものは隣り合わないものとする. また, 飛び地のある地図は考慮せず, 地図上はつねに連結な領域であるとする. そうすると四色問題は, 直感的に次のように定式化できる.

『平面を有限個の連結領域（国）に分ける. このとき, つねに各連結領域に四つの色の一つを割り当てて, 線で隣り合っている二つの領域には, 必ず違う色が割り当てられるようにできるのか.』

3　メビウスの五人の王子の問題

四色問題と似ている問題で, メビウスが提起した「五人の王子の問題」というものがある.

『むかしむかし, インドに大きな国がありました. この国の王様がなくなるときに, 五人の王子に言いました. 「わたしが死んだら, 王国は五人で分けなさい. ただし, どの領土も他の四人の領土と境界線（点ではいけない）を共有するように分けなければならない」. さて, 王国はどのように分ければよいでしょう？』

ここで仮に, この問題が解けたと仮定する. そうすると, 「相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図があるならば, 四色問題は間違っている」と断定できる.
だがここで, 「相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がないならば, 四色問題は正しい」とは断定できない. メビウスの問題が, 四色問題を混乱させたのはその点である. 多くの人が断定できるものだと勘違いをして, 相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がないことを証明しようとした.

4　ケンプ鎖を利用した証明

こういう問題の証明には, 本質的に国の個数に関する数学的帰納法を用いるのが効果的とされている. つまり, 四か国以下の地図ならば, 当たり前に四色で塗り分けられることができるので, 地図が与えられたとき, その国を可能な限りくっ付けるなどして数を減らしていき, 塗り分けがつねにもっと国の数の少ない地図に還元されることを示せばよいわけである.

不可避集合とは, どの地図にも, そのどれかが必ず含まれているような形の国, または連なった国々からなる集合である（例は後に現れる）. **可約配置**とは, 塗り分けにあたって無視してよい連なった国々の形である. ここで**配置**とは, 特定の形の国のつながった図形を意味する.

不可避集合である三枝点, 四枝点, 五枝点（各頂点から枝（辺）が n 本出ているとき, n 枝点という）がいずれも可約配置であることを証明してみる. このうち三枝点以下の場合は自明であるから, 問題になるのは四枝点, 五枝点である. これらを**ケンプ鎖**（ある塗り分けにおいて特定の二色がつけられた点の列）を利用することで調べる.

5　ハミルトン閉路を利用した証明

四色問題を別の**同値**な問題にして, それについての証明をするという方法をとる. ここで, ” 同値” とは四色問題が正しければその問題も正しく, 逆にその問題が正しければ四色問題も正しい, という関係にある問題である.

ハミルトン閉路とは, グラフ上のすべての頂点を 1 度ずつ通る閉路のことである. このことから次のことが言え, これは四色問題と深くかかわっていると推測できる.
『三枝の多面体上のハミルトン閉路が存在するならば, 多面体の辺を三色で塗り分け, その面を四色で塗り分けられることは可能である.』
したがって, すべての三枝の多面体がハミルトン閉路を持っているかどうかを調べる.

6　今後の課題

グラフ理論による理解を深め, 四色問題をもっと厳密に解く. また, ヒーウッド, バーコフ, ルベーグ, ヘーシュ, そして肝心のアッペルとハーケンらの四色問題の研究を調べ, それらにどのような特徴があるのかを見つける.

参考文献

[1] 一松信 著, 四色問題 どう解かれ何をもたらしたのか, 講談社, 2016.
[2] ロビン・ウィルソン 著, 茂木健一郎・訳, 四色問題, 新潮社, 2004.
[3] 瀬山士郎 著, 点と線の数学, 技術評論社, 2015.
[4]R. ディーステル 著, 根上生也/太田克弘・訳, グラフ理論, 丸善出版, 2012.
[5] アーサー・ベンジャミン/グアリー・チャートランド/ピン・チャン 著, 松浦俊輔・訳, 青水社, 2015.