四色問題〜間違いだらけの証明〜

BV21028　荒川　和也

令和 3 年 11 月 4 日

目次

1　はじめに

1.1　研究背景

数学の難問の中で最も有名なものは何だろうか．私はその疑問をもとに研究課題を模索した結果, そこでひとつ挙げられたのが「四色問題」だった．この四色問題は 1976 年に K・アッペルと W・ハーケンによって解決されている．その解法は, コンピュータを用いてあらゆる地図が約 150 の基本的な地図のバリエーションでしかないことを確かめ, それらすべてについて四色で塗り分けるというものだった．人の手ではなく, 最後はコンピュータによって解かれたこの問題はどれほど難問だったのか. この機会に調べようと思い研究課題に決めた.

1.2　歴史的背景〜四色問題の誕生〜

四色問題を取り上げるにあたって, 折角なのでざっくりと四色問題の誕生話を見ていくこととする.

1852 年 10 月 23 日のこと, 当時ロンドン大学教授であったド・モルガン (Augustus de Morgan;1806〜1871) が, アイルランド人の著名な数学者でもあり物理学者でもあるハミルトン (William Rowan Hamilton;1805〜1865) に一通の手紙を書いた.

「親愛なるハミルトン様．今日わたしの学生が, ある事実の理由を教えてほしいと言ってきました．ところがわたしは, その「事実」が本当なのかどうか, 今になってもわからないのです．彼によると, 一つの図形を任意の方法で分割して各部分に色を塗るとき, 境界線を共有する部分同士が違う色になるようにすると, 四色が必要になることはあっても, それ以上必要になることはないそうです.・・・・・・」

この手紙はまだ続くが, この問題は知られているのか, また先生のご意見はどうか, などという問い合わせをしている．このド・モルガンによる手紙に対してハミルトンは「わたしは貴兄の『色の四元数』に, いまはすぐ手をつけるつもりはありません」と一蹴している.

このときド・モルガンに質問した学生は, 後年エジンバラ大学の教授になったフレデリック・ガスリー (Frederick Guthrie) であり , 問題を提起したのは兄のフランシス・ガスリー (Francis Guthrie) であるとわかっている．そのため, 四色問題を「ガスリーの問題」と呼ぶ人も少なくはない.

2　四色問題の定式化

さて, 四色問題とは簡単に言えば「四色あればどんな地図も, 隣り合う国々が違う色になるよう塗り分ける事ができる」というものである．だがここで, 数学の意味ある問題として考えた場合, 例えばここでいう" 地図" とは何を指すのか, " 隣り合う" とは何を指すのか, について定式化する必要がある.

だがここで先にいっておくが, この研究においてはあまり厳密な定式化, および解法は行わないとする．つまり, グラフ理論における「$k-$ 色彩色可能か？」などではなく, あくまで四色問題を文脈的に解くという方法をとる．そのため, この研究では言葉による説明が多い（なるべく長ったらしい説明が無いようには努力する）．この理由として, 私がグラフ理論における知識が浅はかであるということが大きい．どうか多めに見てもらいたい.

2.1 直感的にとらえる四色問題

まず, グラフ理論における四色問題の定理を見る.

定理 2.1.

任意の平面的グラフは 4-彩色可能である.

文字を見ただけでも意味は分かるのではないか, と思う. 本来ならば, 「平面的グラフ」や「4-彩色可能」について, 厳密な定義が必要なのだろうが, 先に述べた通りここではやらないものとする.

かといって, 四色問題をあやふやなまま認識しては話にならない. そこに注意をしながら, ” 直感的に” 四色問題を定式化していく.

まず**国**について述べる. 地図上にある国とは, つまり**グラフ**としてみることができる.

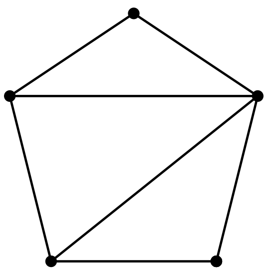


図 2.1.1.

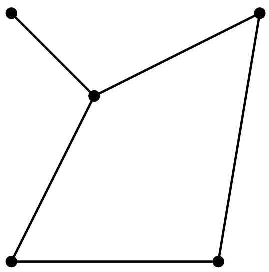


図 2.1.2.

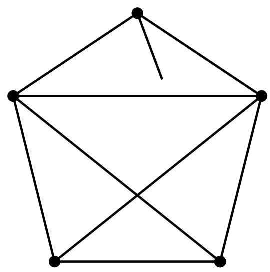


図 2.1.3. 辺の端が点と接していない

グラフとは一般に図 2.1.1. や図 2.1.2. のように頂点と辺から構成される図形である. しかしここで注意してほしいのは, 辺同士が交差していたならば, その交差点を頂点とみなすこととする. また, 辺の端は必ず頂点に接している, ということである. これが満たされていない場合, その図形はグラフではないとする（例は図 2.1.3.）. この二つのことは約束するとして, 以降話を進めるものとする.

.

次に**隣り合う**国というときには, 二つの国が**国境線**に沿って境を接しているものと約束する. 仮に一点だけで接している国をも隣り合う国とみなすと, 図 2.1.4. のような扇形の国々の場合, すべての国と隣り合っていることとなってしまい, これにはたくさんの色が必要となってしまう.

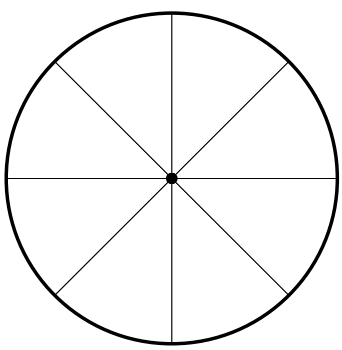
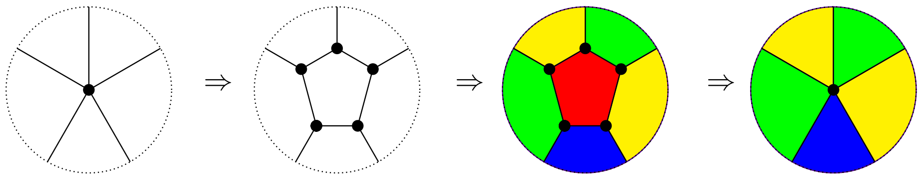


図 2.1.4. 中心の一点を” 隣り合う” と見なすと, 色はいくらでも必要となる.

このようなことがない，すなわち一点に会するのは最大三か国まで，となっている地図を**正規地図**という．というのも，もし四か国以上の国が一点で会していた場合を図 2.1.5. で考える．交点の部分を周りに広げて，すべての交点にちょうど三個の国が集まっている新しい地図を作る．この新しい地図が四色で塗り分けられるならば，広げていた部分を小さくして点としてしまえば，もとの地図も四色で塗り分けられることとなる．したがって以下，地図の塗り分けには正規地図のみを考える．



元の地図　　点を周りに広げる　　地図を塗る　　広がりを点に戻す

図 2.1.5

また，国は連結な領域であるとする．現実の地図では，海外に植民地があったり，飛び地があったりするが，そういう領域を同一の色指定してしまうと，四色では塗り切れない場合が生じる．その例が図 2.1.6. である．

また，塗り分けに際して" 外部領域" を気にする人もいるが，それはあまり問題ではない．外部領域（環になった）はもう一つの国と考えればよいからだ．

けれども，外部領域に関しては球面上での考え方がある．というのも，その地図が平面ではなく地球儀の上に書かれていると考える．そうすると，外部領域は，他の領域と何ら違いがないものとなる．実際，平面上に地図を描くことは，地球儀の上（球面上）に地図を描くことと等価である．（図 2.1.7. 参照）

したがって，**四色問題**とは次のように定式化される．

四色問題

平面を有限個の連結領域（国）に分ける．このとき，つねに各連結領域に四つの色の一つを割り当てて，線で隣り合っている二つの領域には，必ず違う色が割り当てられるようにできるのか．

これを解決するには，このことが正しいと証明する（肯定的解決）か，またはこれが正しくないことを示す，すなわち，どうしても五色以上ないと塗分けられない（反例）地図を構成する（否定的解決）かのいずれかをしなくてはならない．

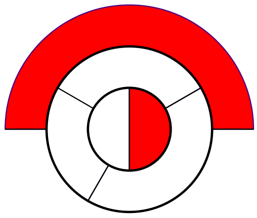


図 2.1.6.

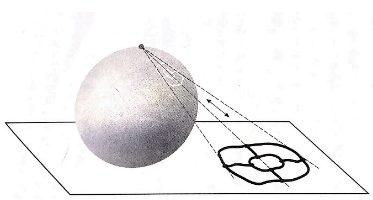


図 2.1.7.

2.2　素朴な考察

2.2.1　三色問題は成り立たない

そもそもの話として，「三色問題」は成り立たないのか，ということについて一応確認しておく（一色，二色が成り立たないのは明らかである）．

地図の中には三色で塗り分けられるものもある．それは実は四色問題と深く関連付けられて研究されてきたが，ここでは深く追求しないものとする．ここで注意すべきなのは，「どの四か国も互いに接していないような地図でも，三色で塗り分けられるとは限らない」ということである．その一例，ないし三色問題が成り立たない反例は図 2.2.1. である．

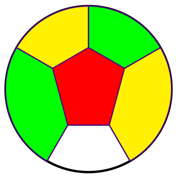


図 2.2.1.　残りの領域を赤，黄，緑の三色では塗れない

2.2.2　三次元空間内での四色問題は成り立たない

三次元の"国"というものを認めるならば，好きなだけ多くの色を必要とする地図ができてしまう．それは，数本のしなやかな棒（あるいは色付きの毛糸）が互いに触れ合っている様子を例として挙げる（図 2.2.2.）．どの棒も，触れている棒とは違う棒が描かれているので，これらを塗り分けるには五色が必要である．

図 2.2.2.

三次元の例をもう一つ挙げる．まず 1 から n までの数字をつけた棒を横に並べ，その上に，1 から n までの数字をつけた棒を縦に並べる（図 2.2.3.）．次に，同じ数字がついている縦横の棒を組み合わせて（一つの国として）接着すると，三次元の国が n 個できる．この国々は互いに触れ合っているので，塗り分けるには n 色が必要である．ここで n は好きなだけ大きな数にすることができる．図 2.2.3. は $n = 5$ のときである．

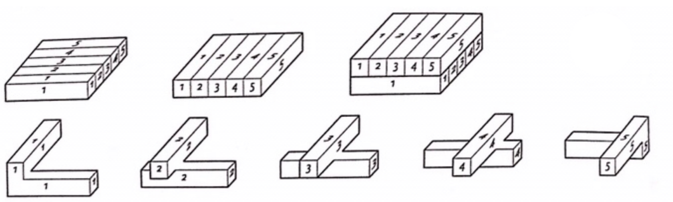


図 2.2.3.

3　メビウスと五人の王子の問題

3.1　問題提起

前述の通り, 四色問題は 1852 年にガスリーによってはじまった．ところが, 四色問題の期限はもっと古く, 1840 年ごろにメビウス（August Ferdinand Mobius ; 1790〜1868）が行った講義にさかのぼれるという間違った話がある．これはメビウスが提起した「五人の王子の問題」が, 一見四色問題と似ているからである．以下, この問題についてと, なぜ間違っているのかを見ていく．

五人の王子の問題

むかしむかし, インドに大きな国がありました．この国の王様がなくなるときに, 五人の王子に言いました．「わたしが死んだら, 王国は五人で分けなさい．ただし, どの領土も他の四人の領土と境界線（点ではいけない）を共有するように分けなければならない」．さて, 王国はどのように分ければよいでしょう？

メビウスの提起したこの問題は結論からいって, 不可能なことである．それを確認する．

3.2　五人の王子の問題が誤りである証明

メビウスの問題に答えがない理由を直感的に理解するのは簡単である．年長の三人の王子の領土をそれぞれ A, B, C とよぶこととする．図 3.2.1. に示すように, 三つの領域は互いに境界線を共有していなくてはならない．このとき, 四番目の王子の領域 D は, 領土 A, B, C に完全に囲まれているか, 完全にその外側にあるかのどちらかでなければならない．二つの状況は, それぞれ図 3.2.1. の b と c に相当する．各状況において, 領土 A, B, C, D のすべてと共通の境界線を持つように五番目の王子の領土 E を配置することは不可能である．

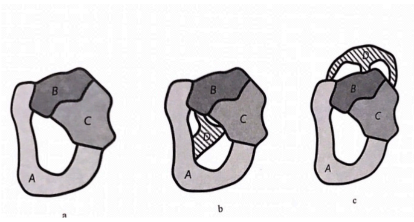


図 3.2.1.

ここで大いに間違ったが, 相互に隣り合う 5 つの領域を含む地図がないことを示して, 四色問題を証明しようとした点である．

3.3　四色問題との混乱

ここで論理的に考えを進める．というのも, この五人の王子の問題が仮に解けたと仮定する．するとこのときに, 「相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図があるならば, 四色問題は間違っている」と言えることが分かる．

では逆に, 「相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がないならば, 四色定理は正しい」ということ

が言えるのだろうか？ということが問題として挙げられる.

ここで二つの内容 P, Q を次のように定める.

P：自然数が 0 で終わる
Q：自然数が 5 で割り切れる

このとき, 「P が真ならば, Q は真である」という命題は真である. 確かに 10, 100, 250 といった 0 で終わる自然数は, 必ず 5 で割り切れる.

またここから, 「Q が偽ならば, P は偽である」という命題も真であることが分かる. 確かに, 11, 69 534 といった 5 で割り切れない自然数は, 必ず 0 で終わらない.

けれども, 「Q が真ならば, P は真である」という命題は真にはならない. 15, 75, 105 といった自然数は 5 で割り切れるが, それらは 0 では終わらないからだ.

つまり, 言いたいことは次である.

二つの命題 P, Q に対して, 「P が真ならば, Q は真である」が真であるとき, 「Q が偽ならば, P は偽である」も真である, ということが導ける.
しかし, 「P が真ならば, Q は真である」が真であるとき, 「Q が真ならば, P は真である」も真である, ということは一概に言えない.

ここでメビウスの五人の王子の問題に戻る. 二つの内容 P', Q' を

P'：相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がある.
Q'：四色問題は間違っている.

このとき, 「P' が真であるならば, Q' は真である」と言うことができる. そのため上述より, 「Q' が偽であるならば, P' も偽である」ということが言える.

ただし, 「P' が真ならば, Q' は真である」, つまり, 「相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がないならば, 四色問題は正しい」ということは言えないのである. ゆえにメビウスの問題を解けないことを示す上の論証は, 四色問題が正しいことの証明にはならない.

多くの人々が, 相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がないことを示して四色問題を証明しようとしたらしいが, まったくの筋違いだったのである.

4 ケンプ鎖を利用した証明

4.1 着想 その 1

こういう問題の証明には, 本質的に国の個数に関する数学的帰納法を用いるのが効果的とされている. つまり, 四か国以下の地図ならば, 当たり前に四色で塗り分けられることができるので, 地図が与えられたとき, その国を可能な限りくっ付けるなどして数を減らしていき, 塗り分けがつねにもっと国の数の少ない地図に還元されることを示せばよいわけである. ここで後の説明のため不可避集合と可約配置について確認する.

定義 4.1.1.　**不可避集合**とは, どの地図にも, そのどれかが必ず含まれているような形の国, または連なった国々からなる集合である.（例は後に現れる）

定義 4.1.2.　**可約配置**とは, 塗り分けにあたって無視してよい連なった国々の形である. ここで**配置**とは, 特定の形の国のつながった図形を意味する.

もう少し詳しく説明すると, 配置 C がもっと大きい地図 M の一部にあるとする. このとき C を除いた残りが四色で塗り分けられれば, その塗り分け方に対して, そのままでは無理であっても, 必要に応じてある定まった規則で色の交換などの修正を施すと, その塗り分け方を C に延長し, M 全体の四色に塗り分けにできる, という性質を持つとき, C を可約配置という. 可約配置を除いて地図の国の数を減らすことを, 地図の**還元**という.

自明な可約配置の簡単な一例は, 二辺国, あるいは三辺国である.（図 4.1.1.）

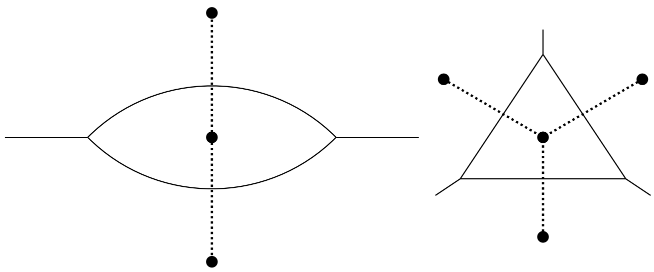


図 4.1.1.　二辺国（左）と三角形（右）

後者は三角形, 前者は少しおかしい言葉かもしれないが, 二角形ということができる. 二辺, または三辺国を無視して塗っても, あとでその周りの国に使った以外の色をそこに割り当てることは容易である. 一般に, m 色が許されれば,（m-1）辺以下の国は全て「自明な可約配置」である.

大きな地図の中に可約配置があれば, それを除いた地図の塗り分けを考えればよいので, 国の数を減らすことができる. したがって, 帰納法が有効であるといえる. もしも, 可約配置ばかりからなるような不可避集合が作られるならば, 任意の地図に対して国の数が減らせることになって, 四色問題の帰納法による証明が完了する.

あるいは, 四色問題が誤りであって, どうしても五色が必要な地図があるものとする. そうすれば, 五色を要する地図のうち, 国の数の最小な, **最小反例**があるはずである. もし可約な配置を含んでいた場合, それを除いたもっと少ない数の国からなる反例ができる. そのため, その最小反例は可約な配置を含みえない. したがって, 可約配置をたくさん見つけていけば, ついに最小反例の中にも必ずそのどれかが現れて矛盾となる, という議論が成立する. 以上が着想の大まかなあらすじである.

4.2　三角形分割に対する基本公式

4.2.1　オイラーの多面体定理

不可避集合の一例を求めるため, まずオイラーの多面体定理を確認する.

定義 4.2.1　多面体とは, 4 つ以上の複数の多角形で囲まれた立体を表す. ただし, 立体の内部は含まない. つまり, 多面体は複数の頂点を結ぶ直線の辺と, その辺に囲まれた面によって構成される. 以

下, 多面体 K の頂点（vertices）, 辺（edges）, 面（faces）の個数をそれぞれ V, E, F で表す. （とくに, K が平面上の多角形の集まりでも同様に考える.）

定義 4.2.2.（オイラー標数） 多面体 K のオイラー標数 $\chi(K)$ を $\chi(K) = V - E + F$ と定める.

このことから, 次のような定理が導ける.

オイラーの多面体定理

任意の多面体 K に対して, 次の条件が成り立つ.

$$\chi(K) = 2$$

証明 多面体 K の 1 つの面を取り除いたものを平面上に引き延ばした図形を K' とするとき,

$$\chi(K') = V' - E' - F' = 1$$

を示せばよい. 右辺が 1 減っているのは下の図 4.2.1. のように面を一つ減らしたためである.

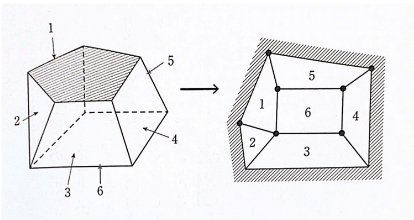


図 4.2.1. 多面体の平面化. このとき, 多面体の面の一つ（ここでは斜線部分）を減らしている.

ここで具体例として, 図 K' を下の図 4.2.K'. とする.

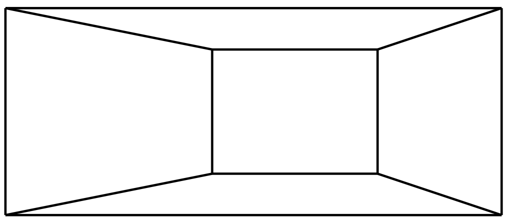


図 4.2.K'.

次に K' の各頂点から対角線を引き, K' を三角形で分割する. この図形を K'' とする (図 4.2.K''.）. このとき, K' に 1 つの対角線を引くと, 1 つの辺と 1 つの面が増える. 多角形の数は有限個より, 追記した対角線の個数を n 個とすると, 次の等式を得る.

$$\chi(K'') = V - (E + n) + (F + n) = \chi(K') \qquad (1)$$

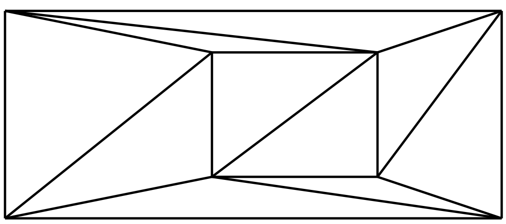


図 4.2.K''.

次に, K'' の一番外側の辺を 1 つ取り除いたときの図形を K_1 とするとき, 1 つの辺と 1 つの面がなくなるため, 計算式 (1) に注意すると,

$$\begin{aligned}\chi(K_1) &= V_1 - E_1 + F_1 \\ &= V'' - (E'' - 1) + (F'' - 1) \\ &= \chi(K'') = \chi(K')\end{aligned}$$

が成り立つ.

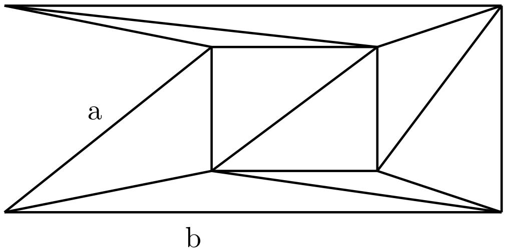


図 4.2.K_1.

以下, 下の図 4.2.K_2 のように K_1 から辺 a, 辺 b, を取り除いったときの図形を K_2 とするとき, 同様の議論で

$$\chi(K_2) = \chi(K') \qquad (2)$$

が成り立つ.

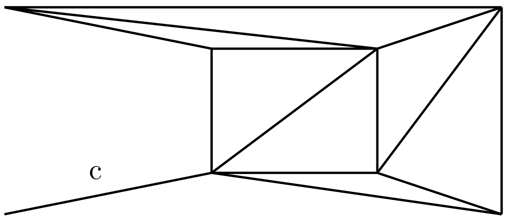


図 4.2.K_2.

このとき, 上の図 4.2.K_2 のような K_2 の辺 c を取り除いたときの図形を K_3 とするとき, K_2 から頂点が 1 個, 辺が 1 個だけ減少するため, 計算式 (2) に注意すると

$$\begin{aligned}\chi(K_3) &= V_3 - E_3 + F_3 \\ &= (V_2 - 1) - (E_2 - 1) + F_2 \\ &= \chi(K_2) = \chi(K') \qquad (3)\end{aligned}$$

が成り立つ.

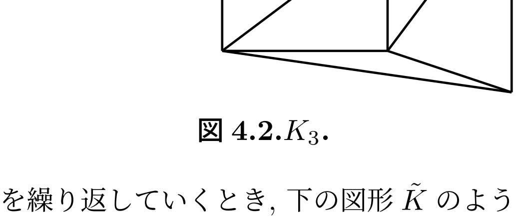


図 4.2.K_3.

以下, 同様にしてこの操作を繰り返していくとき, 下の図形 $\tilde{K}$ のように三角形となる.

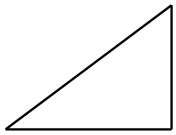


図 4.2.$\tilde{K}$**.**

このとき, この操作は有限回であり計算式 (3) に注意すると K' と $\tilde{K}$ のオイラー指標が一致することは容易にわかる．よって, 次の計算式を得る．

$$\begin{aligned}\chi(K') &= \chi(\tilde{K})\\ &= 3-3+1=1\end{aligned}$$

したがって, $\chi(K)=2$ が示された.

4.2.2　オイラーの多面体定理から導く基本公式

では, このオイラーの多面体定理から重要な基本公式を導く.

正規地図の双対グラフ（地図での面（領域）を点に置き換えて得られる図形）は三角形からなるから, 平面上に枝の囲む図形がすべて三角形であるようなグラフを描く（図 4.2.2.）．その頂点の数を V, 枝（辺）の数を E, 面の数（外側も含める）を F とすると, オイラーの多面体定理から

$$V-E+F=2 \qquad (1)$$

である. 次に各頂点から出る枝の数を数える．枝が n 本出ているとき, n **枝点**または n **焦点**ということとする．n 枝点の総数を V_n とする．n 枝点はもとの地図でいえば n か国に接する n 辺国に相当するから, n が 1,2 のものはないとしてよい．というのは, あったら消してしまっても, 塗り分けには影響しないからである.

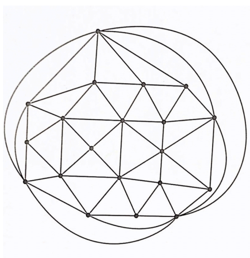


図 4.2.2.　三角形分割

そうすると, $n \geqq 3$ としてよいので,

$$V=V_3+V_4+V_5+\cdots \qquad (2)$$

である．この和はもちろん個々の地図では有限個であって, 一点から出る最大の枝の数の所までである.

次に枝の数を数える．もとの地図のすべての辺は, ちょうど二辺国の境だから, すべての枝は二点を有する．他方 n 本の枝が出るから, のべ, $3V_3+4V_4+5V_5+\cdots+nV_n+\cdots$ 本の枝があるが, このままでは, すべての枝がその両端から見て, 二度数えられている．よって, 等式

$$2E=3V_3+4V_4+5V_5+\cdots+nV_n+\cdots \qquad (3)$$

を得る．一方, 面はすべて三角形でその周りの枝は, のべ 3F 本あるがこれもまた各枝が両側から二回ずつ数えられているから,

$$2E = 3F,\ \text{すなわち}\ 4E = 6F \qquad (4)$$

となる．そこで, 式 (2) を 6 倍して式 (3) を引き, $2E = 6E - 4E = 6E - 6F$ と変形すると,

$$6V - 6E + 6F = 3V_3 + 2V_4 + V_5 - V_7 - 2V_8 - \cdots \qquad (5)$$

となる．式 (1) から, 式 (5) の左辺は 2 の 6 倍, すなわち 12 だから基本公式

$$3V_3 + 2V_4 + V_5 - V_7 - V_8 - \cdots = 12 \qquad (6)$$

を得る．右辺をオイラー標数の 6 倍と修正すれば, 公式 (6) は任意の曲面で成立する．これがここでいう**基本公式**である．

4.3　基本公式の応用

とくに平面（または球面）のときには, 前記の公式 (6) の右辺が正であることから, 左辺に + の項が必ずある．V_3, V_4, V_5 のすべてが 0 ということはない．つまり三角形分割には, 五枝以下の点が必ずあることになる．いいかえれば, 五枝以下の点は平面グラフの不可避集合の簡単な一例といえる．

このことから, ただちに任意の平面地図は六色で塗り分けられることがわかる．六色あれば五枝以下の点（もとの地図では五角形以下の国）は, 自明な可約配置だからである．

一般にある曲線グラフに m 以下の点が必ずあるならば, その曲線上の地図は (m+1) 色で塗り分けられる．さらに次のような一般的定理が成り立つ．

定理 3.3.

もしもある曲面 S 上のグラフに必ず m 枝以下の点があり, また完全 $(m+1)$ 点グラフが S 上に描けないならば, その曲面 S 上の地図は必ず m 色で塗り分けられる．

証明　m か国以下の地図はもちろん m 色で塗り分けられる．そこで n か国の地図をとり, 国の数が n よりも少ない地図は m 色で塗れると仮定する．地図のうち m 辺国 P を探す．その周りに m か国 $A, B, \cdots$ があるが, そのすべてが互いに接していることはない（もしそうならば完全 (m+1) 点グラフが描ける）．たとえば, A と C とが直接接していないとし, さらに, 暫定的にこの両国と中央の P の三か国をまとめて一つの連邦にする．そうすると国の数が 2 減るから, この地図は m 色で塗れる．そのあとで, 国 P の周りは $(m-1)$ 以下で塗られていて, なお一色余っている．それを P に割り当てればよい．したがって, 帰納法による証明が完了した．

この定理から, 平面（球面）上の地図はつねに五色あれば塗り分けられることになる．もしも平面上の地図に必ず四辺以下の国があるならば, $m = 4$ で塗り分けられることになる（これは**局所定理**と合わせることでいうことができる．ここではその証明はせず, 事実として使えるものとする）．だが, 四辺以下の国がない地図は, いくらであってもこの証明は成り立たない．四色問題が難しいとされているのはその場合である．

4.4 四色問題の証明 その 1

4.4.1 四枝点の可約性

以上の予備考察に続いて, 不可避集合である三枝点, 四枝点, 五枝点がいずれも可約配置であることを証明してみる．このうち三枝点以下の場合は自明であるから, 問題になるのはまず四枝点である．

四枝点 P を無視して塗り分けをしたと仮定する．ここで, 色を 0, 1, 2, 3 で代表させる．もし, 出来上がった塗り分けのうち P の隣の四点, A, B, C, D の相対する点に同じ色がついていれば, 一色余ったものを P につけてやれば解決する．そのため, A, B, C, D にすべて相異なる色がついていたときが問題となる．

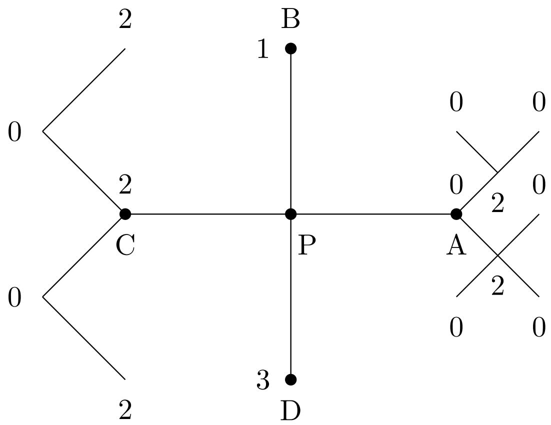


図 4.4.1.　ケンプ鎖

A, B, C, D につけられた色を順次 0, 1, 2, 3 としてよい．そこで一対の相対する点, たとえば A と C に注目してそこから出る 0 と 2 の色のついた点を全部たどる．このように, ある塗り分けにおいて特定の二色がつけられた点の列を, ケンプ（Alfred Bray Kempe ; 1849〜1922）が用いたことから, **ケンプ鎖**という．

A と C から出る二つの 0, 2 のケンプ鎖が別々のときと, 合するときがある．まず別々のときを考える．このときには, そのどちらか一方（たとえば点の個数の少ない方）をとって, その 0, 2 をすべて交換し他は元のままとした塗り分けを作っても, 条件に違反しない．したがって, そのように修正すれば, 0 か 2 かどちらか一色が浮いて, それを P に割り当てることができる（例, 図 4.4.1.1）．

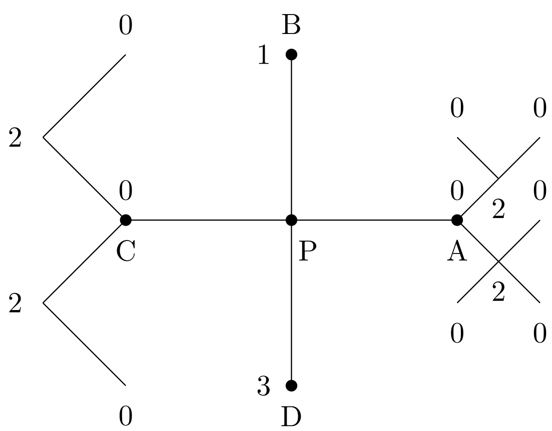


図 4.4.1.1.　図 4.1.1. の C 側の 0 と 2 を交換．P に 2 が当てはめられる．

次に A と C から出るケンプ鎖がつながったときには, 今の操作はやっても無駄である．しかしそれに P をつなぐと, 枝分かれはあるがとにかく平面上に一つの閉曲線 Γ ができる（図 4.4.2.）．ところが平面上の閉曲線 Γ は, 必ず平面を二つに分ける．この性質は**ジョルダンの曲線定理**とよばれている．この定理の証明は省略し, これを正しい事実として使用するものとする．

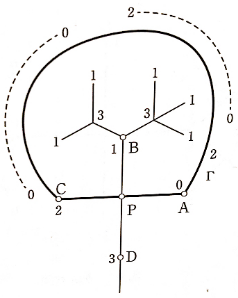


図 4.4.2.　閉曲線 Γ

Γ は平面を内と外に分けるが, 点 1 と 3 とは必ず一方がその内に, 他方がその外にある．このことも厳密に証明するには順序の公理がいるが, 頂点 A, C を相対するようにとったからそうなるはず, という論法で先に進む．

Γ の内部の方（たとえば図 4.4.2. では B）から出る 1, 3 に対するケンプ鎖を考えると, これは Γ の外には出られず,D へはつながらない．したがって, このケンプ鎖の 1, 3 を交換しても塗り分けの条件に合う．これで B が 3 に変わって 1 が浮くから, P に 1 を割り当てばよい．以上により, つねに P を含めて四色で塗り分けられることが分かった．

4.4.2　**五枝点の可約性の試み**

同じような方法で五枝点の可約性を証明してみる．

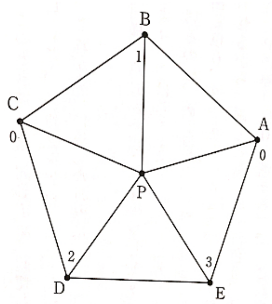


図 4.4.3.　P の周りの配色（五枝点）

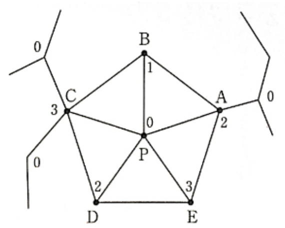


図 4.4.4.　色の交換

五枝点 P を除いて四色で塗り分けたとき, P の周りの五点 A, B, C, D, E に三色しか使われていなければ, 残りの一色を P に割り当てればよいから, 四色がすべて使われているとする．このときは必ず同じ色が二回使われているから, 適当に名をつけかえれば図 4.4.3. のような配色として一般性を失わない．この記号で点 B から出る色 1, 2 に対するケンプ鎖を考える．これが点 D に達していなければ, 1,2 を交換することにより, 1 を浮かせて P にわりあてられる．

同様に点 B から出る色 1, 3 に対するケンプ鎖が点 E に達していなければ 1, 3 を交換することにより, やはり 1 を浮かせて P に割り当てることができる．

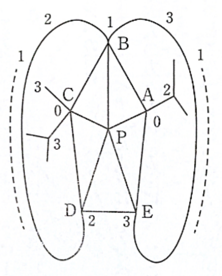


図 4.4.5.　反対側に到達した場合

残るのは, 両方とも反対側に到達した図 4.4.5. のような場合である. このときには C からでる色 0, 3 のケンプ鎖と A から出る色 0, 2 のケンプ鎖とが, それぞれ閉曲線の中に閉じ込められるから, 両方ともそれぞれ色 0, 3, 色 0, 2 の交換ができる. そうすれば図 4.4.6. のように P の周りに 0 が消えるので, これを P に割り当てる.

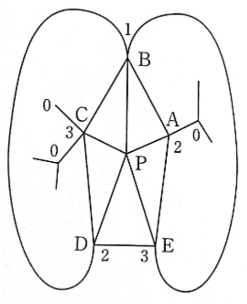


図 4.4.6.　P の周りの 0 が消える

もっとも P の隣点のうち, 同じ点が生じるものもある. 隣点がつなら自明であるから, 四つとすると図 4.4.7. のような形になるとして一般性を失わない.

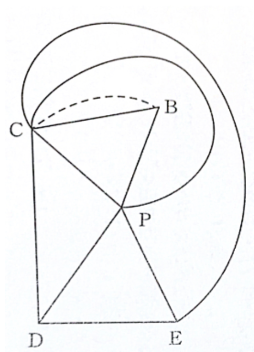


図 4.4.7.　P の隣点が四つの場合

このとき図 4.4.8. のようなグラフを考える. 三角形 CDE の三頂点は別の色に塗らざるを得ない. それを 0, 2, 3 とする. B の色は 1 か 2 である. 2 ならば 1 が浮いて P に割り当てられる. 1 ならば,B から始まる色 1, 2 のケンプ鎖をとれば, これは CE 二点を結ぶ環に含まれて, D に達しえないから, 1, 2 を交換することにより, P に 1 を割り当てることができる.

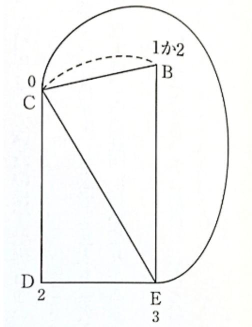


図 4.4.8.　B の色は 1 か 2

これですべての場合が終わった. したがって, 四色問題は証明された？.

4.5　ケンプ鎖を利用した証明の誤り

簡潔にいって, この証明は誤りである.

その誤りは五枝点の取り扱いでの, 図 5.1.1. の場合である. その図自体ように B から出る色 1, 2 のケンプ鎖と, 色 1, 3 のケンプ鎖とが別々のループを描いてそれぞれ D, E に到達しているのなら問題ない. ところが, この両者が別々ではなく, 途中で色を 1 つけられた別の点 Q で交差している事が起こりうる（図 5.1.1.）. このような場合, 運が悪いと A から出る色 1, 3 のケンプ鎖とが接していて, その一方だけの色の交換ならできるが, 両方とも交換すると, 色 1 が隣り合うことがありうる. 実際, 図 5.1.1. の場合には, まさに図の上の方の点 M, N でそのような干渉が起きている.

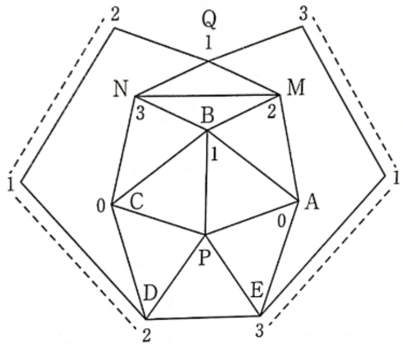


図 5.1.1.　五枝点の場合の問題点

もちろん, これは図 5.1.1. が四色塗り分けできないというのではない. いっているのは, P を除いてその周りをこのように配色すると塗りそこないがあって, 四色で塗れることが上手く証明できない, というだけのことである. この図の場合にはそれに応じた手直しが必要である. しかし証明のためには, いつでもそういう手直しが, という保証が必要であってそれは簡単な議論ではすみそうにない.

5　ハミルトン閉路を利用した証明

5.1　着想 その 2

「4.1 ケンプ鎖を利用した証明」による解答は不必要に長く, 少し無駄が多い. そこで, 四色問題を別の**同値**な問題にして, それについての証明をするという方法がある. ここで, ” 同値” とは四色問題が正しければその問題も正しく, 逆にその問題が正しければ四色問題も正しい, という関係にある問題である.

5.2　四色問題の変身 その 1

ここでも双対グラフを利用する. 双対グラフは, 個々の国を表す点と隣り合う国々に対応する点同士を結ぶ線とからなるグラフである. これに何本か線を追加して全体を三角形に分割する. 「三角形化」したグラフの中の各点に, 線で結ばれた点同士が同じ文字にならないように四種類の文字を割り当てて, その後追加した線を除去すれば, 元のグラフの点にも四つの文字が割り当てられたことになる（図 5.2.1.）.

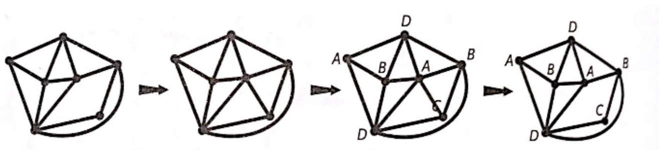


図 5.2.1.

次に三角形の国々に点を追加して, 辺の数が四本になるようにする. このとき, すべての点に A と B の二文字を交互に割り当てることができる. それからこれを, もう一つの方法で同じことを行う. すなわち, 三角形の国々の前とは違った位置に点を追加して, すべての点に A と B の二文字を交互に割り当てる. 最後に, 文字を割り当てた二種類の地図を重ね合わせて, 追加した点を消す（図 5.2.2.）.

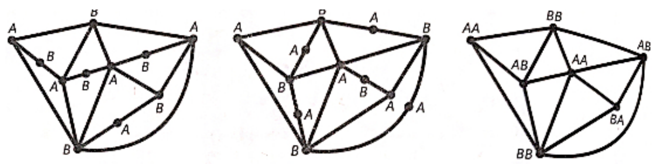


図 5.2.2.

この方法により, どんな地図上の点に対しても, 線で結ばれた点同士が同じ文字にならないように AA, AB, BA, BB という四種類の「合成」文字を割り当てられると主張できるかもしれない. けれども, こうした文字の割り当てが常に可能であるという確証はない. そのため, この試みは四色問題の解答としては認められていないのだ.

また, 他にも独創的なアイデアを提案できる. 三枝地図から出発し, 国ではなく境界線の塗り分けを考える, というものである.

定理 4.2.1.

各頂点でちょうど三本の境界線が会している地図では, 同じ色の境界線同士が端点を共有しないように境界線を塗り分けるには, 三色あれば足りる.

例として, 地図中の国々が A, B, C, D の四色で塗り分けられている三枝地図を考える. このとき, 次のようにして地図中の境界線を α, β, γ の四色で塗り分けられることができる.

A 色の国と B 色の国のペア, または C 色の国と D 色の国のペアの間の境界線を α 色で塗る.

A 色の国と C 色の国のペア, または B 色の国と D 色の国のペアの間の境界線を β 色で塗る.

A 色の国と D 色の国のペア, または B 色の国と C 色の国のペアの間の境界線を γ 色で塗る.

この操作を絵で説明すると図 5.1.3. のようになる.

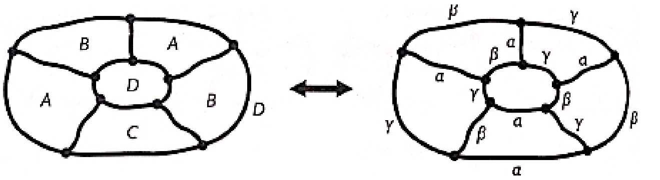


図 5.2.3.

この操作は必ず逆向きにも進められる. 今ここに三枝図があり, 各交点で三色すべての境界線が会するように境界線が塗り分けられていると仮定する. 任意の国を選んで A の色を塗ると, あとは上述の手順により, この国に隣接する国々の色が分かる. たとえば, もとの国とその隣りの国との間にある境界線が β の色で塗り分けられているのならば, 隣りの国は C の色で塗らなければならない. この作業を続けていくと, 地図中のすべての国に色を塗ることができる.

もう一つの逆向きの操作は後に重要になってくるもので, 三色の中から二色を選び, この二色で塗られた境界線に注目するというものである. このとき常に, 一種類以上の「閉路」のパターンが作られる. (図 5.2.4.)

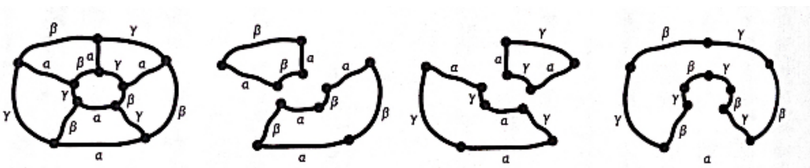


図 5.2.4.

ここで, 第一の閉路の内側にあるすべての国に 1, 外側にあるすべての国に 0 という数字を割り当てる. さらに, 第二の閉路についても同じ操作を行って, 二つの結果を重ね合わせる (図 5.2.5.) .

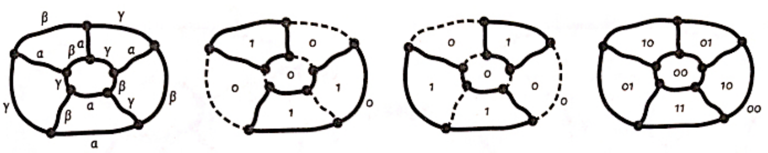


図 5.2.5.

この方法により, 地図中の国々は常に 00, 01, 10, 11 という四つの「色」で塗り分けられることになる.

地図中の境界線を塗ることは非常に重要性である．だがしかし，この「三枝図の境界線が常に三色で塗り分けられる」という証明は，もとの四色問題の証明に負けず劣らずとても難しかったのである．

5.3　四色問題の変身 その 2

$2n$ 本の点が $3n$ 本の線で結ばれていて，各点で 3 本の線が会しているとき，これらの線を n 本の線からなる三つのグループに分類し，各点で各グループのどれか一本の線が終わっているようにすることができる（普通，分類方法は複数ある）．

たとえば，8 個の点と 12 本の線からなる上の色付きのグラフでは（$n=4$ に対応），α 色の線が第一のグループ，β 色の線が第二のグループ，γ 色の線が第三のグループを形成している．（図 5.3.1.）

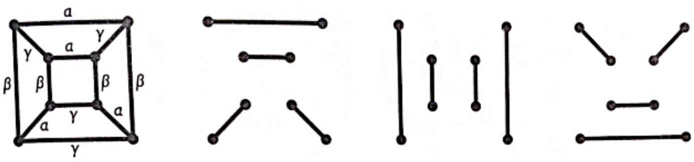


図 5.3.1.

この定理が成立しない例として，14 個の点と 21 本の線からなる（$n=7$ に対応），図 8 のようなグラフを示せる．けれども，このグラフに対応する地図は存在しない．中央の線は，二つの「異なる」国を分けるものではないからである（図 5.3.2.）．

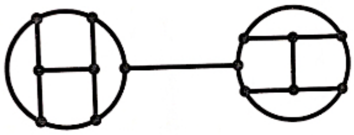


図 5.3.2.

こうした好ましくない場合を除外するために，多面体を平面上に射影したときに得られる三枝地図だけを考えることとする．射影して三枝地図が得られる多面体は，四面体，六面体，一二面体など，各頂点で会している辺（または面）の数がちょうど三になっている「三枝の立体」でなければならない．八面体や二〇面体は，各頂点で会している辺（または面）の数が三より大きいので，三枝の立体ではない．これらの多面体の地図の境界線を三色で塗り分けて，各交点で三色すべての境界線が会するようにさせられているという命題は，四色定理に含まれると同時に，この定理を含んでいる，と主張してみることとする．

この「制限付きの問題」に挑戦するため，以下のように問いかけてみる．

> 命題
>
> どんな三枝の多面体にも，すべての頂点をちょうど一回ずつ通る，一本の閉路があるのだろうか？

一二面体と切頭八面体のすべての頂点を一回ずつ通る閉路を図 5.3.3 に示す．

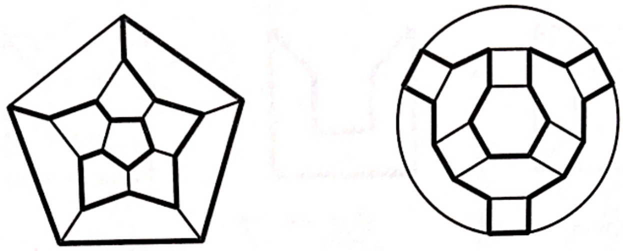


図 5.3.3.

また事実として, 三枝の多面体に閉路があれば, その辺は三色で塗り分けられる. たとえば, 閉路を構成する辺を赤と緑で交互に塗って, 残りの辺を青で塗ればよいのである. この方法による六面体の辺の塗り分けを図 5.3.4. に示す.

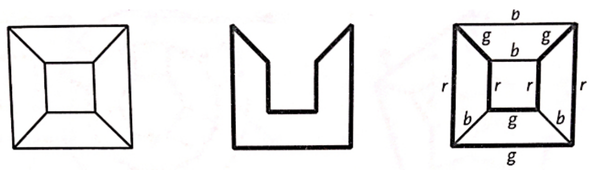


図 5.3.4.

ただ, 多面体のすべての頂点を通る閉路を見つけるという問題は, カークマンとハミルトンによって, 二〇以上前から研究されていた. ここで折角なので彼らの貢献も見てみる.

5.4　カークマンとハミルトン

カークマンは多面体に魅了されていて, 任意の多面体の頂点のすべてを一回ずつ通る閉路を見つけようとした. カークマンは独自の用語を作り上げており, p 個の面と q 個の頂点を持つ多面体を「p–エドラル q– アクロン」とよんだり, 三個の面が会している頂点を「三次サミット」とよんだりしたため, 論文を読むことさえ容易ではなかった. 1855 年にカークマンはこのような閉路を持たない多面体を発見した. その説明によると,

> ハチの巣室を 6 本の平行な辺を切断する方向に二分すると, 一個の六角形と九個の四角形からなる 13-アクロンが得られる. ここで, 閉じた 13-ゴン（これもカークマン独自の用語. 一三角形のこと.）を描くことはできない.

この立体を平面上に射影すると図 5.4.1. のようになる.

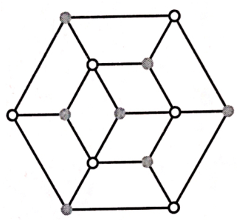


図 5.4.1.

13 個の頂点のすべてを通る閉路を描くことが不可能である理由を理解するために, すべての辺が黒

と白の端点を一つずつ持つように, 頂点を黒と白で塗り分けてみる. このとき, どんな閉路も黒の頂点と白の頂点を交互に通らなければならないが, それが可能になるのは, 黒と白の頂点の個数が等しくなるときだけである. 図 11 では, 黒い頂点が 7 個で白い頂点が 6 個なので, 閉路を描くことはできない. もっとも, カークマンが言うように, 中央の頂点をその左側の頂点と結んでやれば, 閉路を描くことはできる.

翌年, ハミルトンが四元数についての研究の結果（いわゆる二〇点解析）, 一二面体の上に閉路を描くことに興味を持つようになった. ハミルトンは, ι（イオタ）, κ（カッパ）, λ（ラムダ）というギリシャ文字で表される三つの量を考えて, これらが

$$\iota^2 = 1, \quad \kappa^3 = 1, \quad \lambda^5 = 1 \quad \text{ただし,} \quad \lambda = \iota\kappa$$

という方程式を満たしているものとした. ハミルトンはここで μ（ミュー）$= \iota \times \kappa^2$ とすることで, $\mu^5 = 1$ を示すことができた. さらに,

$$\lambda^3\mu^3\lambda\mu\lambda\mu\lambda^3\mu^3\lambda\mu\lambda\mu = 1$$

という長い表現も得たハミルトンは, これを一二面体上の閉路についての用語に言い換えた. すなわち,

頂点 B から出発して C に向かい, 各交点で λ を「右に曲がる」, μ を「左に曲がる」の意味に解釈すると, 求める回路は以下のアルファベット順の文字列によりあらわされる.

BCDFGHJKLMNPQRSTVWXZ

そしてふたたび B に戻ってこられる.

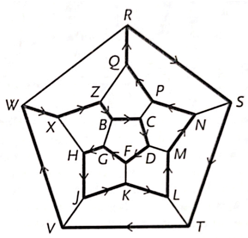


図 5.4.2.

このような, グラフ上のすべての頂点を 1 度ずつ通る閉路のことを**ハミルトン閉路**という.

5.5 ハミルトン閉路を利用した証明の誤り

ここで話を四色問題の方へ戻す. すでに説明した通り, ハミルトン閉路について確認したのは. 次のことが言えるからだ.

定理

三枝の多面体上のハミルトン閉路が存在するならば, 多面体の辺を三色で塗り分け, その面を四色で塗り分けられることは可能である.

したがって, 「すべての三枝の多面体がハミルトン閉路を持っている」ということが証明できれば, 四色問題への解決に近づく. しかし, すべての三枝の多面体がハミルトン閉路を持っているかどうか

を決定することは非常に難しい. カークマンの「ハチの巣型多面体」にはハミルトン閉路はなかったが, これは三枝の多面体ではないので反例とはならない.

またもや簡潔にいうと, こうした定理を用いた四色問題の証明は不可能である. というのも, 図5.5.1. の三枝の多面体にはハミルトン閉路は一つもない. よって, この証明方法が間違っていることが証明された.

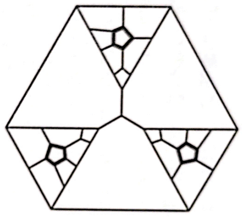


図 5.5.1.

6　おわりに

6.1　結論

過去の数学者が証明しようとした方法を参考に, 四色問題の解法を調べ, 実際にやってみたが どれも証明できるというにはほど遠いものであった. 前述のとおり, 四色問題はアッペルとハーケンによってコンピュータで解かれている. いかに四色問題が難問であるのか, ということを改めて思い知らされた.

6.2　今後の課題

グラフ理論による理解を深め, 四色問題をもっと厳密に解く. また, ヒーウッド, バーコフ, ルベーグ, ヘーシュ, そして肝心のアッペルとハーケンらの四色問題の研究を調べ, それらにどのような特徴があるのかを見つける.

参考文献

[1]　一松信 著, 四色問題 どう解かれ何をもたらしたのか, 講談社, 2016.

[2]　ロビン・ウィルソン 著, 茂木健一郎・訳, 四色問題, 新潮社, 2004.

[3]　瀬山士郎 著, 点と線の数学, 技術評論社, 2015.

[4]　R. ディーステル 著, 根上生也/太田克弘・訳, グラフ理論, 丸善出版, 2012.

[5]　アーサー・ベンジャミン/グアリー・チャートランド/ピン・チャン 著, 松浦俊輔・訳, 青水社, 2015.