測度論 (Lebesgue 積分)

BV20031　中野 光

令和 4 年 5 月 19 日

1　研究背景

数理科学科 3 年次に開講される関数解析や確率統計学論を履修する前に予備知識として測度論 (主に Lebesgue 積分) の勉強をしようと思い今回の研究に取り組むことにした．Lebesgue 積分論とは 20 世紀初頭に Lebesgue によって創始された測度と積分に関する理論で現代数学の重要な基礎理論の 1 つである．今回の研究では Lebesgue 積分を定義する為に必要な「測度」・「可測集合」・「可測関数」を定義し，それらから導かれる (Lebesgue) 積分の定義といくつかの性質について紹介する．

2　測度

ある集合の大きさを表すために測度という測り方と測度で測ることができる集合族，すなわち定義域となる集合族を数学的に定義する．

定義 2.1. X を一般の集合，$\mathcal{F} \subset 2^X$ とする．このとき，以下の条件を考える．

(1) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^C \in \mathcal{F}$
(2) $\mathcal{F}$ の集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

これらを満たす $\mathcal{F}$ を **σ-加法族 (σ-algebra)** という．集合 X と σ-加法族 $\mathcal{F} \subset 2^X$ の組 $(X, \mathcal{F})$ を**可測空間**といい，$E \in \mathcal{F}$ を**可測集合 (measurable set)** という．

定義 2.2. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．写像 $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が次の条件を満たすとき，μ は $\mathcal{F}$ 上の**測度 (measure)** という．

(1) $\mu(\emptyset) = 0$
(2) 互いに交わらない $\mathcal{F}$ の集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

が成り立つ．

さらに，可測空間に測度を加えた $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を**測度空間**という．

3　可測関数

Riemann 積分が Riemann 可積分関数に対して定義されるものである．一方で，Lebesgue 積分は「可測関数」と呼ばれる関数にのみ定義される．よって，可測関数を定義する必要がある．

定義 3.1. 集合 $E \in 2^{\mathbb{R}^n}$ が **Lebesgue 可測集合**あるいは単に **Lebesgue 可測**であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対してある開集合 $G \in 2^{\mathbb{R}^n}$ で

$$E \subset G, \quad \mu^*(G - E) < \varepsilon$$

なるものが存在するときをいう．さらに $\mathbb{R}^n$ での Lebesgue 可測集合全体を $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ と表す．さらに，E が Lebesgue 可測集合のとき，その **Lebesgue 測度**を

$$\mu(E) \coloneqq \mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \mid S_E \in \mathscr{S}(E)\right\}$$

と定義する．ただし，$S_E = \{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$ の集合列で $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ とする．このような S_E 全体を $\mathscr{S}(E)$ と表すことにする

定義 3.2. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．$f : X \to [-\infty, \infty]$ が $\mathcal{F}$-可測関数である (あるいは $\mathcal{F}$-可測である) とは次が成り立つときにいう：任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f^{-1}((a, +\infty]) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}$$

4　Lebesgue 積分

測度・可測集合・可測関数より積分を定義することができる．$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を可測空間とする．

定義 4.1. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ を非負の可測関数とする．この可測関数 f の積分を

$$\int_X f d\mu \coloneqq \sup\left\{\int_X s d\mu \;\middle|\; 0 \leq s \leq f, s : \text{非負単関数}\right\}$$

と定義する．

定義 4.2. $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ を可測関数とする．

$$f^+ \coloneqq \max\{f, 0\}, \quad f^- \coloneqq \max\{-f, 0\}$$

と定義したとき，

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \text{ かつ } \int_X f^- d\mu < \infty$$

となるとき，$f(x)$ は**可積分**であるといい，

$$\int_X f d\mu \coloneqq \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

を f の **Lebesgue 積分**あるいは単に**積分**という．また，

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \text{ または } \int_X f^- \, d\mu < \infty$$

が成り立つとき，f は**積分確定**といい，

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \text{ かつ } \int_X f^- \, d\mu < \infty$$

が成り立つとき，f は **Lebesgue 可積分**あるいは単に**可積分**であるという．

参考文献

[1] 新井仁之 ルベーグ積分講義 日本評論社 2003.1.30
[2] 柴田良弘 ルベーグ積分論 内田老鶴圃　2006.1.30
[3] 相川弘明・小林政晴 ルベーグ積分 要点と演習 共立出版 2018.9.20
[4] 吉田伸生 [新装版] ルベーグ積分入門 使うための理論と演習 日本評論社 2021.3.15