

音楽で見る「数」の歴史

BV21019 千葉朱寧

令和5年5月17日

目次

1	はじめに	2
1.1	研究背景	2
1.2	数学における音楽の位置付け	2
2	音楽と素数	2
2.1	人間と数	2
2.2	歌の起源	2
2.3	2音からなる歌	2
2.4	3音, 4音からなる歌	3
2.5	5音階	4
3	音律がつくる数列	5
3.1	音律とは	5
3.2	純正律	6
3.3	ピタゴラス音律	7
3.4	平均律	8
3.5	音律の矛盾	8
4	終わりに	8

1 はじめに

1.1 研究背景

ピアノのレッスン時に、音楽と数学が関係しているという話を度々聞いた。そのため、具体的にどのような点でつながりがあるかを調べることにした。また、それらの時代背景から受けている影響についてもわかるようまとめる。

1.2 数学における音楽の位置付け

古代ギリシャのピタゴラスは、「万物の根源は数なり」という言葉を残した。ピタゴラスは教団をつくり、そのピタゴラス派は数学を次の4つの教科に区分した。

表 1: 数学の4大科目

	静止している	運動している
数	数論	音楽
量	幾何学	天文学

美しい音楽は美しい数の比によって成り立つとされた。古代以来、音楽と数学は合理的な思考を蓄積できる学問として発展していくこととなる。

2 音楽と素数

2.1 人間と数

多くの動物は、仕草や態度、鳴き声などでコミュニケーションをとっている。言葉を持つ以前の人間も同様に、声の抑揚やリズムでコミュニケーションをしてきたと言われる。その声の高低を区別する行為は、数を意識することにつながっている。また、人間は直立二足歩行を始めたことで、歩く際の右足と左足を交互に踏み出すという2回ずつの交替、つまり拍を感じていた。このように、数を数えることの始まりは何か独立したものでなく、もの同士の関係性を測ることであった。そして、この概念は音楽の発生につながる歌となってゆく。

2.2 歌の起源

声を響かせ、ピッチ (音の高さ) を固定しようとするのが歌の発生につながったと考えられている。そして、1つのピッチの定まった音にもう1つのピッチのある音を加えるというように、歌には相対的に定まった2つ以上の高さの音が必要となる。2音の音高関係を音程といい、音程関係にある複数の音を組み合わせて成り立つメロディーがあって歌が生まれる。歌が生まれたことでメロディーを誰でも同じように再現できるようになり、受け継ぐことができるようになった。

2.3 2音からなる歌

2つの音の高さによる歌は、高い音と低い音という2つの音高を区別することから始まった最も素朴な歌である。ここで、高い音を h 、低い音を l とすると、次のように表される。

$$\begin{array}{cccc} h & h & h & h \\ l & l & l & l \end{array}$$

この図から、意識されなくても2という関係が表されていることがわかる。これに加え、この2つの音がより正確なピッチを持ち、はっきりしたリズムを持つことでさらに歌らしくなる。例えば、

- 2拍子：1 2 / 1 2 …
- 3拍子：1 2 3 / 1 2 3 …
- 4拍子：1 2 3 4 / 1 2 3 4 …

のようなリズムがあり、中でも2拍子は最も初期段階のリズムである。「ずいずいずっころばし」という歌の一節は2拍子の例であり、次のようになっている。



以上から、歌の始まりには「2」が大きく関わっていると言える。

2.4 3音, 4音からなる歌

2音の歌に1音足すと3音の歌になり、さらに1音足すと4音の歌になる。これらは2音の歌より音域が広く、使える音程関係も多い。「なべなべそこぬけ」という歌は、ラシとラソという2つの音程を持つ3音のメロディーである。以下は、その楽譜である。



また、「げんこつやまのたぬきさん」は、ラシとラソとソミという3つの音程を持つ4音のメロディーである。以下は、その楽譜である。



これらの歌は、いずれもラの音で終わっている。このような音は中心音と呼ばれ、調を決める最も主要な音である。一般に、楽曲はこの音で終わることが多い。また、4音までの歌では、メロディーが中心音の周りを大きく離れることはない。つまり、ここで使われている音同士は平等な力関係でなく、中心音に向かって力が働いているようなものである。この関係をオクターブの円の中での位置関係で表すと以下のようなになる。

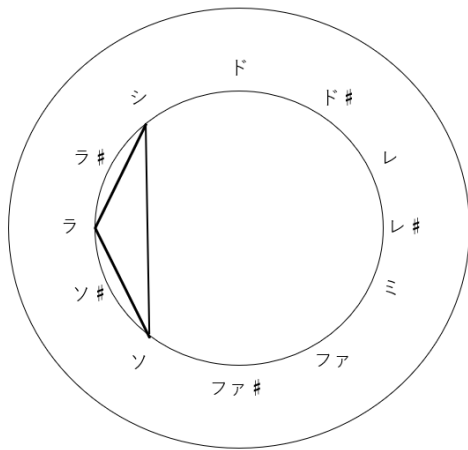


図 1: 3 音

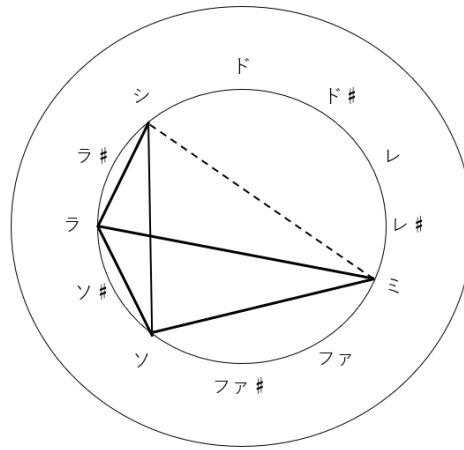
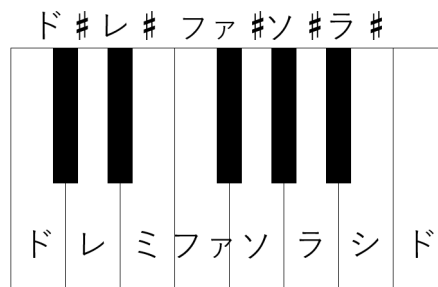


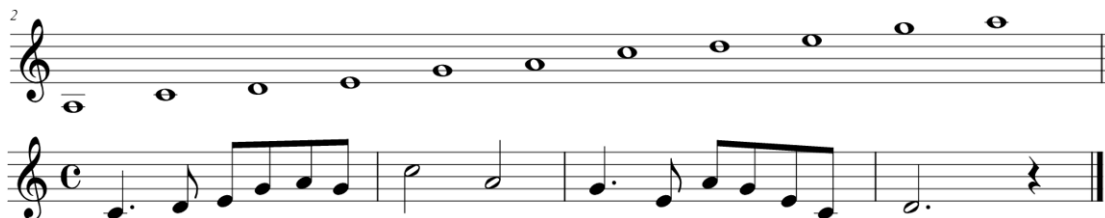
図 2: 4 音



この図形における辺と対角線は、それぞれのメロディーで持つことができる音程を表している。4音のメロディーで最高音と最低音を結ぶ音程を使うことはほとんどないので、点線で表している。

2.5 5音階

4音から5音に至るには、きわめて長い時間がかかった。1オクターブ内のいくつかの音から成り立ち、オクターブを超えても普遍性のある基本的な組織を持つものを音階という。4音までの歌は狭い範囲内でしか動かないのに対し、5音の歌は無理なくオクターブを超えることができ、これを5音階(ペンタトニック・スケール)と呼ぶことができる。5音階が発見されたことでこの音階という概念が生まれた。童謡の「とんび」は、「ラ-ド-レ-ミ-ソ」という音階を使った歌である。「ラ-ド-レ-ミ-ソ」の音階は、「ラ-ド-レ-ミ-ソ-ラ-ド-レ-ミ-ソ-ラ-ド-レ-ミ-ソ…」とオクターブを超えて音階構成音をつないでいくことができる。この音階と歌は以下のようになる。



5音階は最も基本的なものであり、民族音楽で最も多く使われている。古代ギリシャや古代中国ではここから7音階まで発展し、西洋音楽ではこれが使われている。5音階、7音階がつくるオクターブの円の中の位置関係は次のように示される。

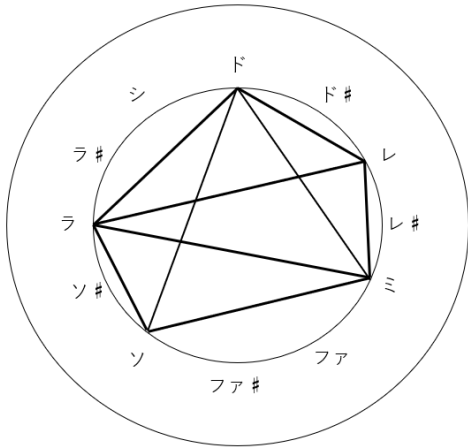


図 3: 5 音階

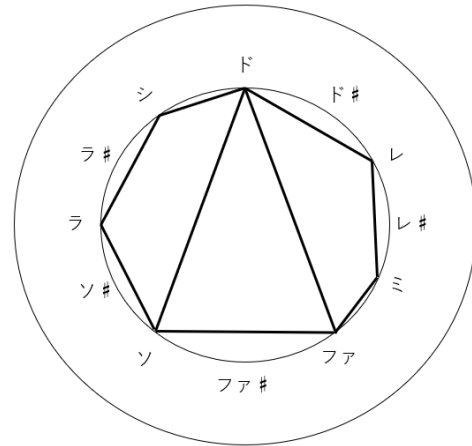


図 4: 7 音階

音階における中心音を主音といい、音階の中の任意の音は主音になり得る。オクターブの円の中で正多角形になる音階は、音程関係が均等になっており、どの音が主音になっても不安定になる。以下は正六角形の例である。

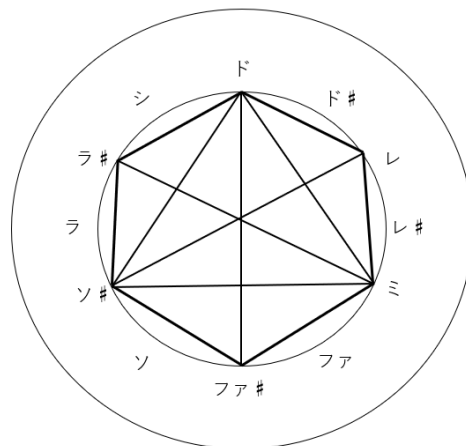


図 5: 6 音階

一方、5 音階や 7 音階は、オクターブの円の中にバランスよく位置する多角形をつくることにより、音階としての普遍性を得ているといえる。これらの多角形は正多角形になることはないが、この非対称性が中心音へ向かう力を強めている。5 音階、7 音階の安定性は、5 や 7 という素数により得られていると考えられている。

3 音律がつくる数列

3.1 音律とは

音の高さは、音の周波数によって決まっている。そのため、音楽に用いる音の高さを規定する必要がある。音の高さの相対関係の取り決め方を音律という。音階は音の高さの並び、すなわち数の並びであり、数列といえる。音律は様々なものがあり、それらを構成する数列に違いがある。ここでは、純正律、ピタゴラス音律、平均律の関係について考える。

3.2 純正律

純正律は、和音(2つ以上の高さの異なる音が同時に響きあう状態をつくる音)を濁りなく協和させるため単純な整数の比から成り立つ、等差数列を使った音律である。特に3度の響きを純正にするために生まれた。3度とは連続するピアノの白鍵3個分のことで、長3度と短3度が存在する。長3度は両端を除くと白鍵と黒鍵合わせて3個の音になるもので、短3度は両端を除くと白鍵と黒鍵合わせて2個の音になるものである。16世紀ヨーロッパを代表する音楽理論家、ジョゼッフォ・ツァルリーノ(1517~1590)は、長3度を $\frac{5}{4}$ とした純正律長音階、短3度を $\frac{6}{5}$ とした純正律短音階をつくった。ドを1とした数列と振動数の比は以下ようになる。

- 純正律長音階

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{8}(n-1) & (n = 1, 2, 3, 5) \\ \frac{4}{3} + \frac{1}{6}(n-4) & (n = 4, 5, 6, 8) \\ 1 + \frac{1}{8}n & (n = 7, 8) \end{cases}$$

表 2: 振動数の比

音名	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ	ド
n	1		2		3	4		5		6		7	8
a_n	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2

- 純正律短音階

$$b_n = \begin{cases} a_n & (n = 1, 2, 4, 5, 8) \\ \frac{6}{5} + \frac{1}{5}(n-3) & (n = 3) \\ \frac{6}{5} + \frac{1}{5}(n-4) & (n = 6, 7, 8) \end{cases}$$

表 3: 振動数の比

音名	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ	ド
n	1		2	3		4		5	6		7		8
b_n	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$		$\frac{9}{5}$		2

3.3 ピタゴラス音律

ピタゴラスは、鍛冶屋で職人が打つ槌の音の中に共鳴し心地よく響く音を発見した。それは槌の質量の違いから生じており、協和音をつくる数比が含まれていた。ピタゴラス音律は、最も協和する2:3の音程関係、すなわち完全5度の協和性をもとにつくられ、人類が最も長く使ってきた等比数列による音律である。完全5度とは、連続する白鍵5個分の中にミとファ、シとドなど間に黒鍵が含まれていない連続する白鍵が1つあるものである。ドから完全5度上を順に取ると、”ド→ソ→レ→ラ→ミ→シ→ファ#→ド#→ソ#→レ#→ラ#→ファ→ド”と12の音すべてを巡ってもとのドに戻ってくる。そのため、それぞれの音は12を法として一意に定まり、オクターブ関係にある音程の比は1:2となって同じ音とみなされる。これは次のような図で表され、これを5度圏という。

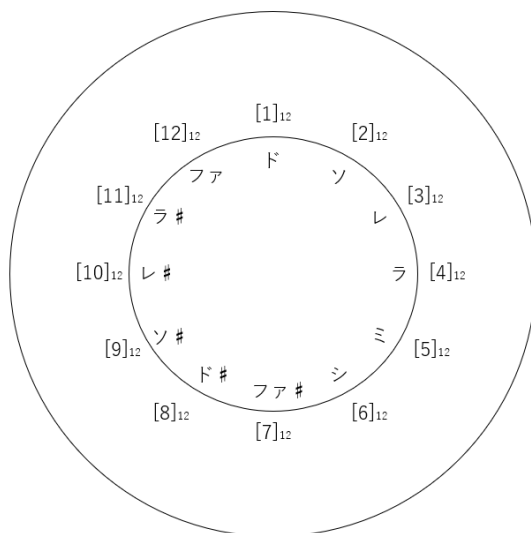


図 6: 5度圏

ピタゴラス音律の数列と振動数の比は以下のようになる。

$$R_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{2^p}$$

表 4: 振動数の比

音名	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ	ド
n	1	8	3	10	5	12	7	2	9	4	11	6	13
p	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6
R_n	1	$\frac{(\frac{3}{2})^7}{2^4}$	$\frac{(\frac{3}{2})^2}{2}$	$\frac{(\frac{3}{2})^9}{2^5}$	$\frac{(\frac{3}{2})^4}{2^2}$	$\frac{(\frac{3}{2})^{11}}{2^6}$	$\frac{(\frac{3}{2})^6}{2^3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{(\frac{3}{2})^8}{2^4}$	$\frac{(\frac{3}{2})^3}{2}$	$\frac{(\frac{3}{2})^{10}}{2^5}$	$\frac{(\frac{3}{2})^5}{2^2}$	$\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^6}$

ただし、 n は5度を積み上げる回数で、 2^p は $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ で得られた音をもとのドと同じオクターブへ下げるための変数である。ここで、 $n = 1$ のときと $n = 13$ のときの R_n はオクターブ関係のため、1:2になるはずである。しかし、 $n = 13$ のとき

$$R_{13} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^6} = 2.02728652\dots$$

と誤差が出てしまう。この誤差 0.027... をピタゴラス・コンマという。

3.4 平均律

このピタゴラス・コンマを出さないために、1オクターブを12の等比的に均等な音程に分割したものが平均律である。この音律は、指数・対数の計算が一般化する19世紀後半以降に普及した。他の音律と比較して最もバランスの良い音律であり、どの音からでも同じ比率の音階をつくることができ、転調が自然なため、現代で最もよく使われる音律となった。数列と振動数の比は以下のようになる。

$$E_n = 2^{\frac{n-1}{12}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

表 5: 振動数の比

音名	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ	ド
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
E_n	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

また、もとになる音の振動数 $P(\text{Hz})$ から n 番目の音の振動数 $R(\text{Hz})$ は次の式とグラフで表すことができる。

$$R = P \times 2^{\frac{n-1}{12}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

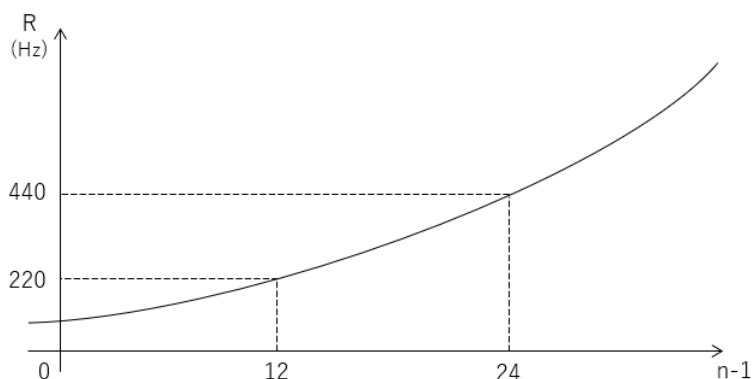


図 7: 平均律

3.5 音律の矛盾

以上のように、3つの音律はそれぞれ異なる目的でつくられたものである。協和する和音をつくるためには単純な整数比で成り立つ純正律、自然なメロディーや転調を生み出すためには等比数列によるピタゴラス音律と平均律が必要になる。しかし、等差数列でできた音律がつくる音同士の協和関係が有理数であるのに対し、等比数列でできた平均律では無理数になる。したがって、有理数と無理数は一致しないことから矛盾が生まれる。今日までこれを解決するため様々な調律法が開発されたが、この本質がある限り完全に解消することはできないといえる。

4 終わりに

音楽を通じて、関連した数学の発展の過程を知ることができた。音階や音律をつくるたびに、数学の規則性が現れていることがわかる。今後も、このように身近な分野から数学との関係性を調べたい。

参考文献

- [1] 桜井進・坂口博樹著, 音楽と数学の交差, 大月書店, 2011年
- [2] 音階の数学 <https://note.com/geekdrums/n/nfa5f24b40069>, 参照日 2023年2月27日
- [3] 音律とは? ~純正律、平均律、ピタゴラス音律の特徴~ <https://tabatalabo.com/musical-temperament>, 参照日 2023年2月27日