帰納法と対称式の基本定理

数理科学研究会 bv22321 木村 敏樹

令和 5 年 5 月 21 日

命題の証明などの論理的推論は大別して演繹法と帰納法の二種類がある．大雑把に説明すれば，演繹法は一般の事柄から具体的なことを導く方法，帰納法は具体的な事柄から一般的な事柄を導く方法のことである．我々がなじみ深いのは演繹法であろうが，今回は帰納法について探求していく．

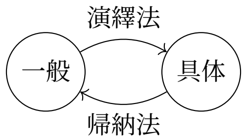

図 1　推論の関係

1　帰納法

ますは帰納法のきちんとしたアルゴリズムを見てみる．

帰納法

自然数 n についての条件 P に対し

- $P(0)$ が正しい．[*1]
- 任意の自然数 k に対し $P(k)$ が成り立つならば $P(k+1)$ も成り立つ．

の 2 条件がみたされるならば任意の自然数 n に対し $P(n)$ は成り立つ．

帰納法のアルゴリズムの理解にはしばしばドミノ倒し (将棋倒し) が例に出される．これは，最初のドミノが倒れることと，前のドミノが倒れるとその次のドミノも倒れるという二つの条件が満たされると，ドミノは最後まで (ドミノの列が無限に続くのであれば無限に) 倒れていくことを表している．

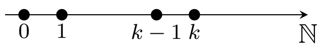

図 2　ドミノ倒しの例

帰納法の理論を初めて確立したのはパスカルであり，1654 年に数三角形論において用いられた．

[*1] $P(0)$ とはここでは最初の変数が述語をみたすことを意味し，(変数)$= 0$ で必ず満たされなければいけないという意味ではない．

Proposition (パスカルの三角形)

組み合わせ $_nC_r$ をピラミッド状に並べる．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & {}_0C_0 & & & & & 0\text{段目} \\
 & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & & & 1\text{段目} \\
 & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & & & 2\text{段目} \\
 & & & \vdots & & & & & \vdots \\
{}_{n-1}C_0 & & & \cdots & & {}_{n-1}C_{n-1} & & & n-1\text{段目} \\
{}_nC_0 & {}_nC_1 & & \cdots & & {}_nC_{n-1} & {}_nC_n & & n\text{段目} \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

ただし，最初の段を 0 段目とよぶ．

このとき，非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ 段目の組み合わせの和は 2^n となる．

e.g. どのように証明すればいいかわからないときは，具体的な数を代入することで主張を掴む．

- $n = 0$ のとき，組み合わせの定義により

$$_0C_0 = 1 = 2^0$$

- $n = 1$ のとき，
- $n = 2$ のとき，
- $n = 3$ のとき，

ここまで確認すると，命題の主張は

$$_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$$

であることが分かる．

では，今回のテーマである数学的帰納法によって証明してみよう．

Proof： 数学的帰納法を用いる．

[1] $n = 0$ のとき，組み合わせの定義から

$$_0C_0 = 1 = 2^0$$

より命題は成立する．

[2] k を任意にとり，$n = m$ のときも命題の成立を仮定する．すなわち

$$_mC_0 + {}_mC_1 + \cdots + {}_mC_{m-1} + {}_mC_m = 2^m$$

が成立すると仮定すると，$n = m + 1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&{}_{m+1}C_0 + {}_{m+1}C_1 + \cdots + {}_{m+1}C_m + {}_{m+1}C_{m+1} \\
&= \underbrace{{}_{m+1}C_0}_{=1} + ({}_mC_{1-1} + {}_mC_1) + ({}_mC_{2-1} + {}_mC_2) + \cdots + ({}_mC_{m-1} + {}_mC_m) + \underbrace{{}_{m+1}C_{m+1}}_{=1} \\
&= 2 + (\underbrace{{}_mC_0}_{=1} + 2{}_mC_1 + \cdots + 2{}_mC_{m-1} + \underbrace{{}_mC_m}_{=1}) \\
&= 2 + \{2 + 2({}_mC_1 + \cdots + {}_mC_{m-1})\}
\end{aligned}
$$

ここで，$_mC_1 + \cdots + {}_mC_{m-1}$ は

$$
\begin{aligned}
&{}_mC_0 + {}_mC_1 + \cdots + {}_mC_{m-1} + {}_mC_m \\
&= \underbrace{{}_mC_0}_{=1} + ({}_mC_1 + \cdots + {}_mC_{m-1}) + \underbrace{{}_mC_m}_{=1} \\
&= 2 + ({}_mC_1 + \cdots + {}_mC_{-1}) \\
&= 2^m
\end{aligned}
$$

より，

$$({}_mC_1 + \cdots + {}_mC_{m-1}) = 2^m - 2$$

と表せる．よって，

$$\begin{aligned} {}_{m+1}C_0 + {}_{m+1}C_1 + \cdots + {}_{m+1}C_m + {}_{m+1}C_{m+1} &= 2 + \{2 + 2(2^m - 2)\} \\ &= 2^{m+1} \end{aligned}$$

より成立する．

以上により，数学的帰納法からすべての非負整数 n に対して命題が成立することが確かめられた． ■

$\sum$ 記号を用いると，いくらか見やすくなる．

方針：

$$\sum_{k=0}^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} ({}_mC_{k-1} + {}_mC_k)$$

であるが，

$$\begin{aligned} k = 0 \text{ のとき} &\quad {}_mC_{k-1} \Rightarrow {}_mC_{-1} \\ k = m+1 \text{ のとき} &\quad {}_mC_k \Rightarrow {}_mC_{m+1} \end{aligned}$$

となり扱いずらい．なので，まずはそれらを除去する方針で進める．

Proof:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}C_k &= \underbrace{{}_{m+1}C_0}_{=1} + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}C_k + \underbrace{{}_{m+1}C_{m+1}}_{=1} \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}C_k \end{aligned}$$

ここで，組み合わせの公式を用いると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}C_k$ は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}C_k &= \sum_{k=1}^{m} ({}_mC_{k-1} + {}_mC_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} {}_mC_{k-1} + \sum_{k=1}^{m} {}_mC_k \end{aligned}$$

と書き直される．

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} {}_mC_{k-1} &= \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k - {}_mC_m \\ &= 2^m - {}_mC_m \\ &= 2^m - 1 \\ \sum_{k=1}^{m} {}_mC_k &= \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k - {}_mC_0 \\ &= 2^m - 1 \end{aligned}$$

より，

$$\sum_{k=1}^{m} {}_mC_{k-1} + \sum_{k=1}^{m} {}_mC_k = (2^m - 1) + (2^m - 1)$$

が得られ，以上により，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} &= 2 + 2^m - 1 + 2^m - 1 \\ &= 2^{m+1}\end{aligned}$$

■

組み合わせを見ると二項定理と場合の数を連想する．その方法で証明ができないかを調べてみよう．

今回は数学的帰納法の練習としてパスカルの三角形を題材に取り上げたが，じつは二項定理を用いると一瞬で証明できていしまう．

Proof:

$$(1+x)^n = {}_nC_0 \cdot 1^n + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot x + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot 1^1 \cdot x^{n-1} + {}_nC_n \cdot 1^0 \cdot x^n$$

$x = 1$ を代入すると，

$$(1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$$

となり，

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = 2^n$$

が示された． ■

また，今後は場合の数を用いて証明をしてみよう．

Proof: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k$ は n 個の玉から $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ 個取り出す事象の場合の数の和である．これは n 個の玉に対し，1 個目を取り出すか否か，次に 2 個目を取り出すか否か，次に $\cdots$，最後に n 個目を取り出すか否かを考える事象に一致し，その場合の数は 2^n である．よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = 2^n$ が示された． ■

2 帰納法の派生系

数学的帰納法には仮定の仕方や取り扱う述語 (条件) に応じて派生系が存在する．そのうちで代表的なものをいくつか紹介する．

以下で $P(n)$ は変数 n についての述語とする．

1. 累積帰納法
   (a) $P(0)$ が成立する．
   (b) 任意の自然数 m に対して，$l \leq m$ なるすべての l に対して $P(l)$ が成立すると仮定すると $P(m+1)$ が成立する．

   この 2 条件をみたすとき，すべての自然数 n に対して $P(n)$ は成立する．
2. 二重帰納法
   (a) 任意の自然数 n について $P(0, n)$ が成り立つ．
   (b) 任意の自然数 m について $P(m, 0)$ が成り立つ．
   (c) 任意の自然数 k, l について，$P(k+1, l), P(k, l+1)$ がともに成り立つと仮定すれば，$P(k+1, l+1)$ も成り立つ．

この 3 条件をみたすとき，すべての自然数 m, n に対して $P(m, n)$ は成立する．

3. 多重帰納法

二重帰納法を多変数に拡張したものが多重帰納法である．

4. 後ろ向き帰納法

ある自然数 k に対し $P(k)$ の成立を仮定したとき，$P(k-1)$ が成り立つことを示す．これが後ろ向き帰納法である．背理法とともに用いることが多く，その際は無限降下法と呼ばれる．(自然数には最小値があるが，$n = k$ の成立により $n = k-1$ が満たされるなら，n は無限に小さくとれ，最小性に反する．)

5. 同時並行帰納法

自然数 n に対する m 個の述語 $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0)$ に対して，

(a) $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0)$ が成り立つ．

(b) 任意の自然数 k に対して $P_1(k), P_2(k), \ldots, P_m(k)$ が成り立つと仮定すると，$P_1(k+1)$, $P_2(k+1), \ldots, P_m(k+1)$ が成り立つ．

この 2 条件をみたすとき，すべての自然数 n に対して $P_1(n), P_2(n), \ldots, P_m(n)$ が成立する．

これは累積帰納法と多重帰納法を合わせて用いる証明方法である．

6. 連続帰納法

連続帰納法は実数の連続性を用いる帰納法である．

a をある実数，$P(x)$ を実数上の変数 x についての述語とする．

(a) $P(a)$ が成り立つ．

(b) $P(b)$ が成り立つ任意の b に対して，$b < c$ なる実数 c を適当にとれば，$b < x < c$ なる任意の実数 x について $P(x)$ が成り立つ．

(c) $b < c$ なる任意の実数をとったとき，「$b < x < c$ なる任意の x について $P(x)$ が成り立つ」と仮定すれば，$P(c)$ が成り立つ．

この 3 条件をみたすとき，$a \leqq x$ なるすべての実数 x について $P(x)$ が成り立つ．

7. 超限帰納法

$P(x)$ を整列集合 $(X, \leqq)$ 上で定義されている述語とする．

(a) $P(\min X)$ が成り立つ．

(b) X の各元 x(ただし，$x \neq \min X$ とする) について，すべての $y \in X < x >$ について $P(y)$ が成り立つと仮定すると，$P(x)$ も成り立つ．

この 2 条件をみたすならば，すべての X の元 x について $P(x)$ が成り立つ．

3 対称式の基本定理

最後に対称式の基本定理を証明する．この定理の証明には二重帰納法を用いるのが一般的であるが，ここでは通常の帰納法を 2 回用いることにより証明を紹介する．

一般に，多重帰納法は帰納法を複数回用いる証明方法に帰着することができる．今回がその例となる．

Theorem.(対称式の基本定理)

$x_1, x_2, ..., x_n$ の任意の対称式 $F(x_1, ..., x_n)$ は基本対称式 $s_1, s_2, ..., s_n$ の多項式で表される．

方針： 二重帰納法を用いて証明する．

- n=1 のとき，任意の次数 d$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で成立 (d に関しての帰納法)
- n=k-1 までの成立を仮定
- n=k のときの成立を示す (n に関しての帰納法)

多項式 F が基本対称式の多項式の四則演算で表されることを目指す．

準備： 証明では以下の記号を用いることとする．

- F, G, H, I, J は多項式
- $l, l', k \in \mathbb{N}$
- $s_1, s_2, \ldots, s_n$ は n 次多項式における基本対称式を表すとする
- $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{n-1}$ は $n-1$ 次多項式の基本対称式を表すとする．[*2]

Proof： 多項式 $F(x_1, ..., x_n)$ に関して

[1] $n = 1$ のとき

[i] $d = 0$ では定数となり，定理は成立する．

[ii] $d = l - 1$ までの定理の成立を仮定すると，$d = l$ では

$$x^l = x \cdot x^{l-1} = s_1 \cdot s_1^{l-1} = s_1^l$$

より成立．

よって，数学的帰納法により，$n = 1$ のとき任意の次数 d で定理は成立する．

[2] $n = k - 1$ までの定理の成立を仮定する．$n = k$ のとき

多項式 $F(x_1, ..., x_k)$ に関して

[i] $d = 0$ のとき，定数となり定理は成立する．

[ii] $d = l' - 1$ までの定理の成立を仮定する．$d = l'$ のとき

多項式 $F(x_1, ..., x_k)$ の x_k に 0 を代入すると，$F(x_1, ..., x_{k-1}, 0)$ は $n = k - 1$ に等しいので，帰納法の仮定より，多項式 G を用いて

$$F(x_1, ..., x_{k-1}, 0) = G(s'_1, ..., s'_{k-1})$$

と表せる．

$$H(x_1, ..., x_k) := F(x_1, ..., x_k) - G(s_1, ..., s_{k-1})^{*3}$$

と定めると，

$$H(x_1, ..., x_{k-1}, 0) = F(x_1, ..., x_{k-1}, 0) - G(s_1, ..., s_{k-1}) = 0^{*4}$$

であり，因数定理から $H(x_1, ..., x_k)$ は x_k で割り切れる．対称性より，$x_1, ..., x_{k-1}$ でも同様に割り切れる．よって，

$$H(x_1, ..., x_k) = s_k I(x_1, ..., x_k)$$

[*2] 一般に s_{n-1} と s'_{n-1} は異なることに注意

$$\left(s_{n-1} = \sum_{i<j} \prod_{m=i}^{j} x_m \text{ であるが，} \quad s'_{n-1} = \prod_{m=1}^{n-1} x_m \right)$$

となる．ここで，$I(x_1,...,x_k)$ の次数は $l'-1$ 以下であり，帰納法の仮定から，

$$I(x_1,...,x_k)=J(s_1,...,s_k)$$

と表される．すなわち，

$$H(x_1,...,x_k)=s_kI(x_1,...,x_k)=s_kJ(s_1,...,s_k)$$

と表される．したがって，

$$\begin{aligned}F(x_1,...,x_k)&=H(x_1,...,x_k)+G(s_1,...,s_{k-1})\\&=s_kJ(s_1,...,s_k)+G(s_1,...,s_{k-1})\end{aligned}$$

となり，成立．数学的帰納法から，任意の変数数 n に対して定理は成立する．

以上により，$x_1,...,x_n$ の任意の対称式 $F(x_1,...,x_n)$ は基本対称式 $s_1,...,s_n$ の多項式で表されることが示された． ■

参考文献

[1] 廣瀬健，数学的帰納法，教育出版，1965 年 6 月 10 日

[2] 内田伏一，集合と位相増補新装版，裳華房，2020 年 3 月 1 日

*3 $s'_1,...,s'_{k-1}$(n-1 次の基本対称式) を $s_1,...,s_{k-1}$(n 次の基本対称式) に置き替えた．

*4 $x_k=0$ ならば，$s_1,...,s_k$ 内の x_k を含む項は 0 になる．