

音楽で見る「数」の歴史

BV21019 千葉朱寧

令和5年5月17日

1 はじめに

美しい音楽は美しい数の比によって成り立つとされた。古代ギリシャのピタゴラスは「万物の根源は数なり」という言葉を残し、ピタゴラス派は、数学を数論、幾何学、音楽、天文学の4つの教科に区分した。数学と音楽には具体的にどのような点でつながりがあるのか、また時代背景からどのような影響を受けて発展したのかを述べる。

2 音楽と素数

言葉を持つ以前の人間のコミュニケーションで使う声の高低の区別は数を意識することにつながっている。数を数えることの始まりはもの同士の関係性を測ることであり、この概念は音楽の発生につながる歌となってゆく。ピッチ（音の高さ）を固定し、相対的に定まった2つ以上の高さの音を組み合わせることで歌が生まれた。例えば、2音の音高関係（音程）が1つの最も素朴な歌は2音からなる歌となるが、3,4音と増えるにつれ使える音程関係が多くなる。これが5音になると、オクターブを超えても普遍性のある基本的な組織（音階）を持つようになる。西洋音楽ではさらに発展した7音階が使われている。ここで使われている音同士は平等な力関係でなく、ある1つの音に向かって力が働いており、楽曲はこの音で終わることが多い。この音を**主音**と呼び、調を決める最も主要な音となる。すべての音階が中心音により音階としての普遍性を得るとは限らない。以下は、5音階と6音階のオクターブの円の中での位置関係である。

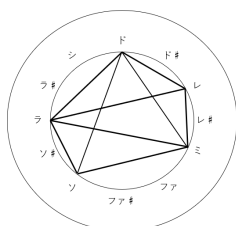


図1 5音階

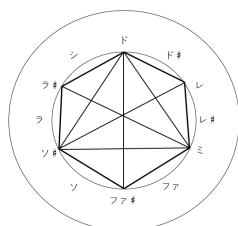


図2 6音階

このように、6音階のような円の中で正多角形になる音階は音程関係が均等になっており、どの音が主音になっても不安定になる。一方で、5音階や7音階は正多角形になることはないが、この非対称性が中心音へ向かう力を強めている。そして、この安定性は5や7という素数により得られると考えられている。

3 音律がつくる数列

音の高さは、音の周波数によって決まっている。音楽に用いる音の高さの相対関係の取り決め方を**音律**という。音階は音の高さの並び、すなわち数の並びであり、数列といえる。音律は様々なものがあり、それらを構成する数列に違いがある。

(i) 純正律

和音（2つ以上の高さの異なる音が同時に響きあう状態をつくる音）を濁りなく協和させるため、単純な整数の比から成り立つ等差数列を使った音律である。ドを1とした数列は以下ようになる。

純正律長音階

純正律短音階

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{8}(n-1) & (n=1,2,3,5) \\ \frac{4}{3} + \frac{1}{6}(n-4) & (n=4,5,6,8) \\ 1 + \frac{1}{8}n & (n=7,8) \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} a_n & (n=1,2,4,5,8) \\ \frac{6}{5} + \frac{1}{5}(n-3) & (n=3) \\ \frac{6}{5} + \frac{1}{5}(n-4) & (n=6,7,8) \end{cases}$$

(ii) ピタゴラス音律

最も協和する2:3の音程関係をもとにつくられた等比数列による音律である。数列は以下ようになる。

$$R_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{2^p}$$

ここで、 R_n は $n=1$ と $n=13$ のときオクターブ関係のため、1:2になるはずである。しかし、 $n=13$ のとき

$$R_{13} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^6} = 2.02728652 \dots$$

と誤差が出てしまう。この誤差を**ピタゴラス・コンマ**という。

(iii) 平均律

1オクターブを12の等比的に均等な音程に分割した音律である。数列は以下ようになる。

$$E_n = 2^{\frac{n-1}{12}} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

3つの音律は異なる目的でつくられた。等差数列の音律がつくる音同士の協和関係が有理数であるのに対し、等比数列の平均律では無理数になる。したがって、有理数と無理数は一致しないことから同時に成り立つには矛盾が生まれる。今日までこれを解決するため様々な調律法が開発されたが、この本質がある限り完全に解消することはできないといえる。

4 おわりに

音楽を通じて、関連した数学の発展の過程を知ることができた。今後も、このように身近な分野から数学との関係性を調べたい。

参考文献

- [1] 桜井進・坂口博樹著、音楽と数学の交差、大月書店、2011年
- [2] 音階の数学 <https://note.com/geekdrums/n/nfa5f24b40069>、参照日2023年2月27日
- [3] 音律とは？～純正律、平均律、ピタゴラス音律の特徴～ <https://tabatalabo.com/musical-temperament>、参照日2023年2月27日