折り紙の平坦折り可能条件

BV21065　杉崎美香

令和 5 年 5 月 17 日

1　はじめに

折り紙と聞けば子供の頃に一度は触ったことがある，という人も多いのではないか．手遊びとして身近な折り紙だが，幾何学的な性質を持っていることから数学的な研究対象ともなっており，その折り畳みや展開の性質は工学分野に応用されることもある．

今回はそんな折り紙のなかでも，折って出来上がった作品が平べったいもの，すなわち平坦折りに焦点をあてその特徴などを紹介する．

2　平坦折り可能性

折り紙の紙 (面) とその上にある折り目の集合から構成される展開図が与えられたとき，平坦折りができる展開図にはいくつかの条件が存在する．

2.1　局所平坦折り可能条件

紙の輪郭線上をのぞき，2 本以上の折り目がぶつかっているところを頂点と呼ぶ．通常の展開図には複数の折り線と頂点が存在しているが，まずは頂点が 1 つだけの場合を考える．

定理 1. (前川=ジュスタン定理) 平坦に折られた紙で，M 個の山折りと V 個の谷折りがひとつの頂点でぶつかっているとする．このとき M と V の差は 2 である．つまり，$M = V + 2$ か $M = V - 2$ が成立する．

定理 2. (偶数次数定理) 平坦に折られた状態における頂点の次数は偶数である．

ここでいう次数とは，角度と無関係な尺度で，その頂点に接続する折り目の数のことを意味する．定理 1，2 は山折り谷折り線の数のみに関する定理だが，角度が関わるものだと次のような定理も存在する．

定理 3. (大小大定理) 平坦折り可能な単頂点展開図において，隣り合う 3 つの角 $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$ が $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ 及び $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ であるとき，それらの 3 つの角の間にある 2 本の折り線 l_i, l_{i+1} の山谷は異なる．

定理 4. (川崎=ジュスタン定理) 頂点の周囲の扇形の角度を順番に $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ とする．偶数個の折り目の集合が 1 つの頂点でぶつかっているとき，これが平坦折りできるのは扇形によって決まる角度の交代和が 0 になること，つまり次が成立することであり，かつ，この時に限る．

$$\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_{n-1} - \theta_n = 0$$

2.2　複数の頂点を持つ展開図と平坦折り可能条件

展開図にあるそれぞれの頂点に注目したとき，平坦折り不可能な点が 1 点でもあればその展開図全体は平坦折り不可能である．同様に，複数の頂点を持つ展開図において，すべての頂点において局所的に平坦折り可能でありながら全体では平坦折り不可能な展開図も存在する．

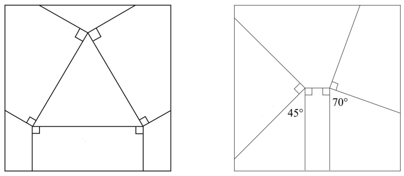

図 1　Two impossible-to-fold-flat folds (出典：[2])

図 1 の左の図は前に紹介した定理 3（大小大定理）から平坦折り可能な山谷割り当てができないことがわかる．右の図は各頂点に注目したとき定理 1〜定理 4 を満たす山谷割り当てを持つが平坦折りできない展開図であり，どちらも [2] に示されている．

このように，展開図に含まれるすべての頂点が局所的に平坦折り可能であることは，展開図全体が平坦折り可能であることの必要条件であり十分条件ではない．

3　おわりに

展開図全体の平坦折り可能性を調べるためにまず単頂点展開図に着目すると様々な条件を見つけることができる．大域的な平坦折り可能性が NP 困難であることは [3] において証明されており，局所的平坦折り可能性がただちに大域的問題の解決につながるわけではない．

しかしながら，平坦折り可能性を計算する展開図に条件を付けたり，山谷割り当てに着目した平坦折り可能性に関しての様々な研究が行われている．今後は NP 困難であることの証明や平坦折りに関する他の問題などに対して理解を深めていきたい．

参考文献

[1] ジョセフオルーク著，上原隆平訳，折り紙のすうり リンゲージ・折り紙・多面体の数学，近代科学社，2012 年

[2] Hull, T. C., The Combinatorics of Flat Folds: A Survey, In Origami3: The Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education, (2002), 29-38.

[3] Bern, M. and Hayes, B., The Complexity of Flat Origami. In Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (1996), 175-183.

[4] 松川 剛久，三谷 純，平坦折り紙の数理，日本応用数理学会論文誌 Vol.27, No.4,2017, pp.333〜353