帰納法と対称式の基本定理

数理科学研究会 bv22321 木村 敏樹

令和 5 年 5 月 21 日

1　帰納法

命題の証明などの論理的推論は大別して演繹法と帰納法の二種類がある．大雑把に説明すれば，演繹法は一般の事柄から具体的なことを導く方法，帰納法は具体的な事柄から一般的な事柄を導く方法のことである．我々がなじみ深いのは演繹法であろうが，今回は帰納法について探求していく．

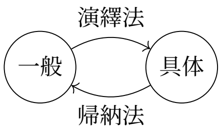

図 1　推論の関係

帰納法とは以下のアルゴリズムによる推論形式である．

帰納法　自然数 n についての条件 P に対し

- $P(0)$ が正しい．
- 任意の自然数 k に対し $P(k)$ が成り立つならば $P(k+1)$ も成り立つ．

の 2 条件がみたされるならば任意の自然数 n に対し $P(n)$ は成り立つ．

帰納法のアルゴリズムの理解にはしばしばドミノ倒し (将棋倒し) が例に出される．これは，最初のドミノが倒れることと，前のドミノが倒れるとその次のドミノも倒れるという二つの条件が満たされると，ドミノは最後まで (ドミノの列が無限に続くのであれば無限に) 倒れていくことを表している．

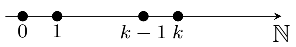

図 2　ドミノ倒しの例

2　対称式の基本定理

対称式はその次元に応じて基本対称式を有するが，実はそれらの基本対称式のみにより一意に表すことができる．これを対称式の基本定理という．高校数学では扱われるが証明はせず，感覚的に取り扱われてきたが，ここで証明を与えてみる．この定理の証明には二重帰納法を用いるのが一般的であるが，初等的に扱えるように，ここでは帰納法を 2 回用いた証明を紹介する．

Theorem.(対称式の基本定理)

$x_1, x_2, ..., x_n$ の任意の対称式 $F(x_1, ..., x_n)$ は基本対称式 $s_1, s_2, ..., s_n$ の多項式で表される．

Proof: 多項式 $F(x_1, ..., x_n)$ に関して

[1] $n = 1$ のとき

[i] $d = 0$ では定数となり，定理は成立する．

[ii] $d = l - 1$ までの定理の成立を仮定すると，$d = l$ では

$$x^l = x \cdot x^{l-1} = s_1 \cdot s_1^{l-1} = s_1^l$$

より成立．

よって，数学的帰納法により，$n = 1$ のとき任意の次数 d で定理は成立する．

[2] $n = k - 1$ までの定理の成立を仮定する．$n = k$ のとき多項式 $F(x_1, ..., x_k)$ に関して

[i] $d = 0$ のとき，定数となり定理は成立する．

[ii] $d = l' - 1$ までの定理の成立を仮定する．$d = l'$ のとき多項式 $F(x_1, ..., x_k)$ の x_k に 0 を代入すると，$F(x_1, ..., x_{k-1}, 0)$ は $n = k - 1$ に等しいので，帰納法の仮定より，多項式 G を用いて

$$F(x_1, ..., x_{k-1}, 0) = G(s'_1, ..., s'_{k-1})$$

と表せる．

$$H(x_1, ..., x_k) := F(x_1, ..., x_k) - G(s_1, ..., s_{k-1})$$

と定めると，

$$H(x_1, ..., x_{k-1}, 0) = F(x_1, ..., x_{k-1}, 0) - G(s_1, ..., s_{k-1}) = 0$$

であり，因数定理から $H(x_1, ..., x_k)$ は x_k で割り切れる．対称性より，$x_1, ..., x_{k-1}$ でも同様に割り切れる．よって，

$$H(x_1, ..., x_k) = s_k I(x_1, ..., x_k)$$

となる．ここで，$I(x_1, ..., x_k)$ の次数は $l' - 1$ 以下であり，帰納法の仮定から，

$$I(x_1, ..., x_k) = J(s_1, ..., s_k)$$

と表される．すなわち，

$$H(x_1, ..., x_k) = s_k I(x_1, ..., x_k) = s_k J(s_1, ..., s_k)$$

と表される．したがって，

$$\begin{aligned} F(x_1, ..., x_k) &= H(x_1, ..., x_k) + G(s_1, ..., s_{k-1}) \\ &= s_k J(s_1, ..., s_k) + G(s_1, ..., s_{k-1}) \end{aligned}$$

となり，成立．数学的帰納法から，任意の変数数 n に対して定理は成立する．

以上により，$x_1, ..., x_n$ の任意の対称式 $F(x_1, ..., x_n)$ は基本対称式 $s_1, ..., s_n$ の多項式で表されることが示された．■

この定理は代数学や解析的整数論などの分野において主に活躍する．例えば π という数が超越的であることの証明には対称式の基本定理を用いることにより，証明中の式を適切に評価することができる．

参考文献

[1] 廣瀬健，数学的帰納法，教育出版，1965 年 6 月 10 日

[2] 内田伏一，集合と位相増補新装版，裳華房，2020 年 3 月 1 日