

音楽で見る「数」の歴史

芝浦工業大学 数理科学研究会 3年
千葉朱寧

■ 数学における音楽の位置付け

	静止している	運動している
数	数論	音楽
量	幾何学	天文学

ピタゴラス…紀元前6世紀に活躍した数学者・哲学者
ピタゴラス派は数学を4つの教科に区分した。

音楽と数学は、合理的な思考を蓄積できる学問として発展していくこととなる。

■ 人間と数

数を数えることの始まりは、もの同士の関係性を測ることであった。人間は、言葉を持つ前から数を意識してきた。

- ・ 例1：声によるコミュニケーション
→ 声の高低の区別は数の区別，つまり数えることと同じ。
- ・ 例2：直立二足歩行
→ 右足と左足の2回ずつの交替，つまり拍を感じていた。

この概念は、音楽の発生につながる歌となってゆく。

■ 歌の起源

声のピッチ（音の高さ）を固定しようとするのが歌の発生につながったと考えられている。

2音の音高関係を**音程**といい、音程関係にある複数の音を組み合わせることで成り立つメロディーがあって歌が生まれる。

■ 2音からなる歌

2音からなる歌は，2つの音高を区別することから始まった最も素朴な歌である。

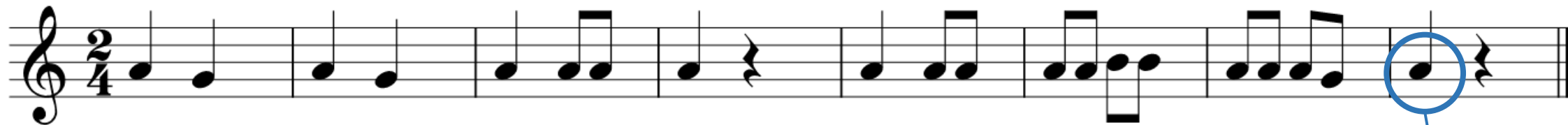
ここで，高い音を **h**，低い音を **l** とすると，

h h h h h
l l l l

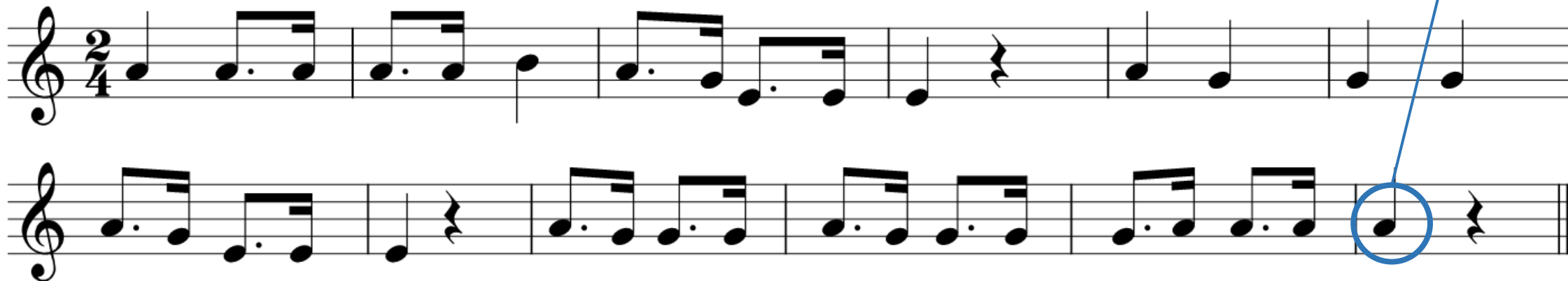
意識されなくても 2 という関係が表されている。

■ 3音, 4音からなる歌

3音の歌の例：なべなべそこぬけ 



4音の歌の例：げんこつやまのたぬきさん 

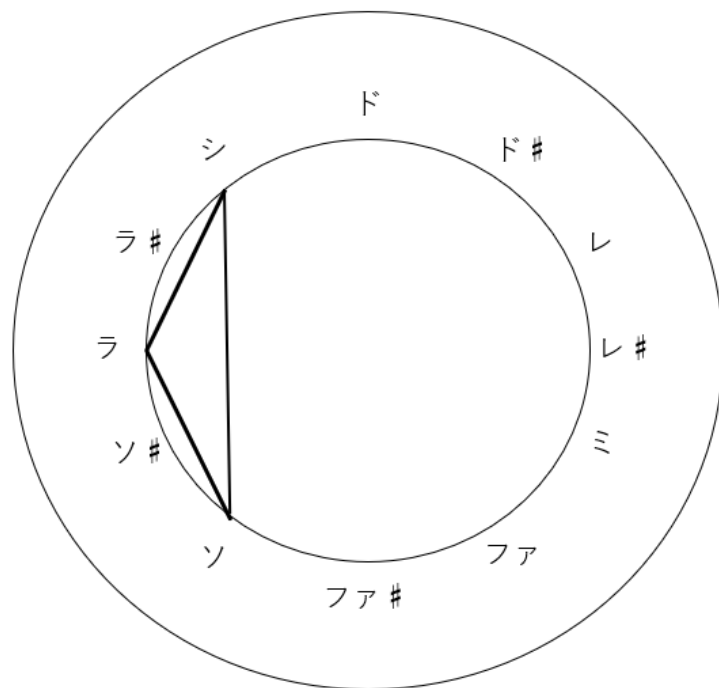


中心音

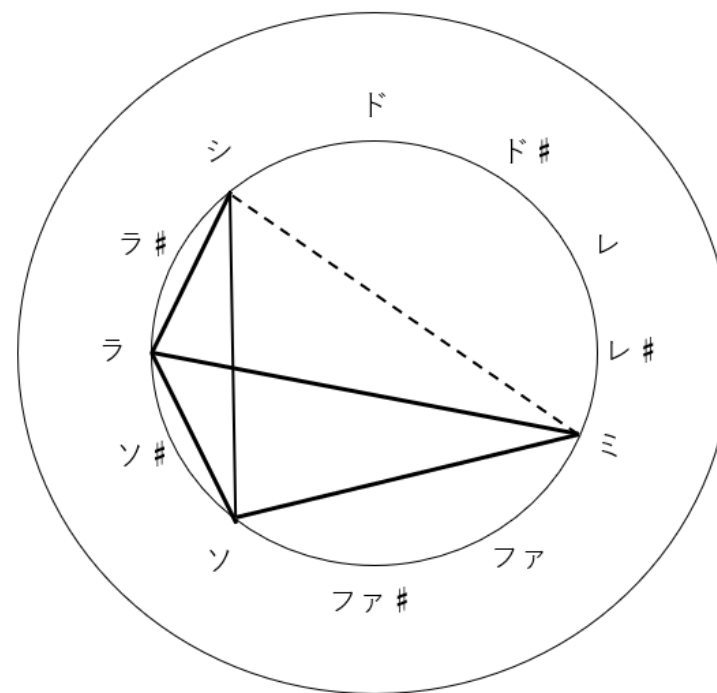
■ 3音, 4音からなる歌

音同士は平等な力関係でなく, 中心音に向かって力が働いている.

オクターブの円の中での位置関係



3音



4音

■ 5音階

1 オクターブ内のいくつかの音から成り立ち，オクターブを超えても普遍性のある基本的な組織を持つものを**音階**という。

4 音までの歌は狭い範囲内でしか動かない。

5 音になると無理なくオクターブを超えることができる。



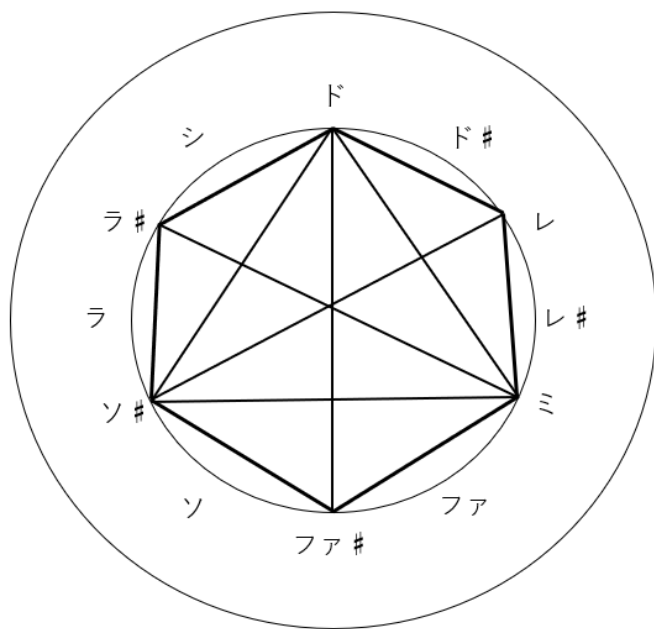
5 音階 (ペントトニック・スケール)

5 音階は最も基本的な音階。

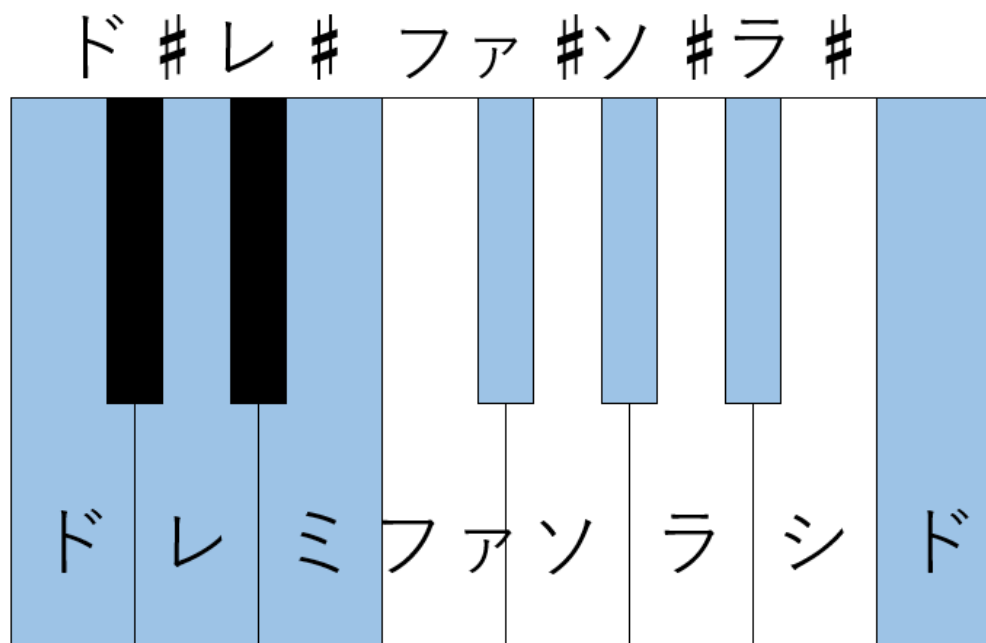
■ 6音階

音階における中心音を**主音**といい、音階の中の任意の音は主音になり得る。円の中で正多角形になる音階は、音程関係が均等になっており、どの音が主音になっても不安定になる。

オクターブの円の中での位置関係

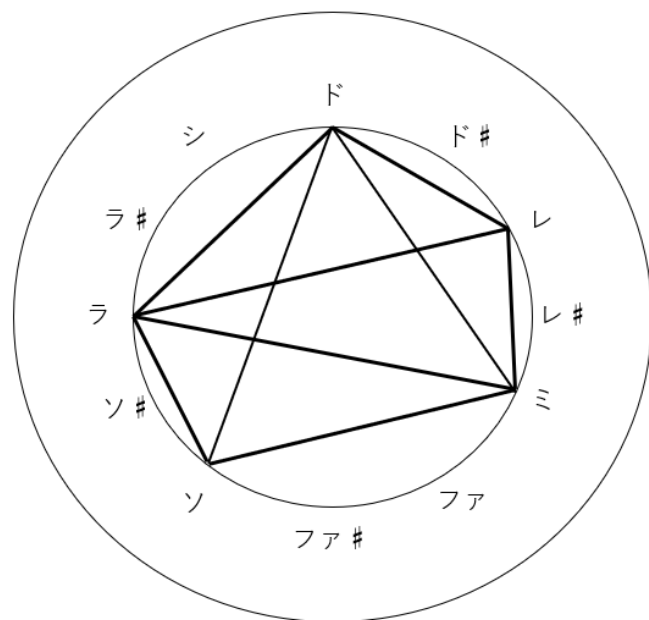


6音

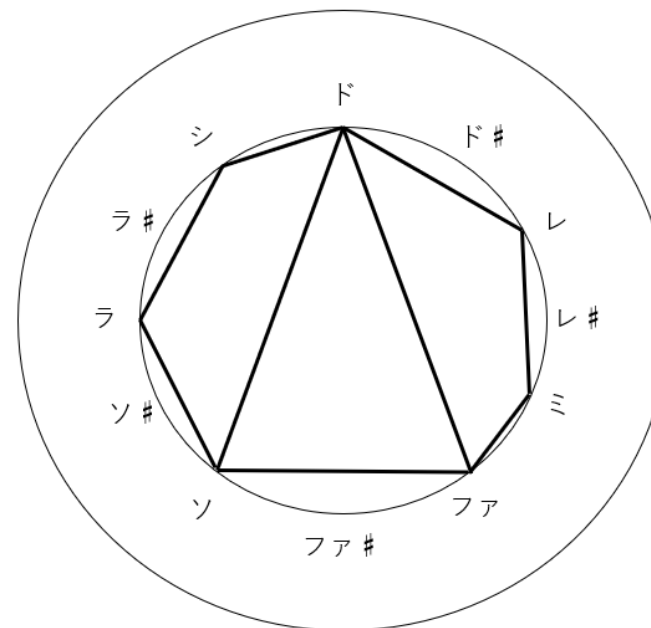


■ 5音階

オクターブの円の中での位置関係



5音



7音

これらの多角形は正多角形になることはないが、この非対称性が主音へ向かう力を強めている。

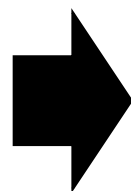
安定性は、5や7という素数により得られている

■ 音律がつくる数列

音の高さは、音の周波数によって決まっている。

音楽に用いる音の高さの相対関係の取り決め方を**音律**という。

音階は音の高さの並び



数列

例：**純正律**， **ピタゴラス音律**， **平均律**

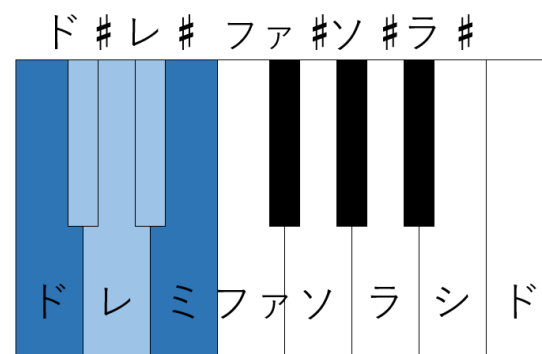
■純正律

和音 (2 つ以上の高さの異なる音が同時に響きあう状態をつくる音) を濁りなく協和させるため単純な整数の比から成り立つ、等差数列を使った音律

3 度の響きを純正にするために生まれた。

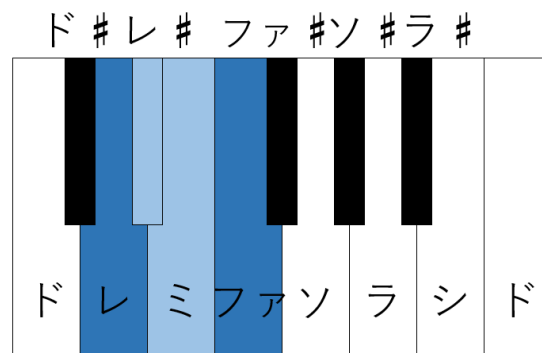
長3度

両端を除くと白鍵と黒鍵合わせて 3 個の音になるもの



短3度

両端を除くと白鍵と黒鍵合わせて 3 個の音になるもの

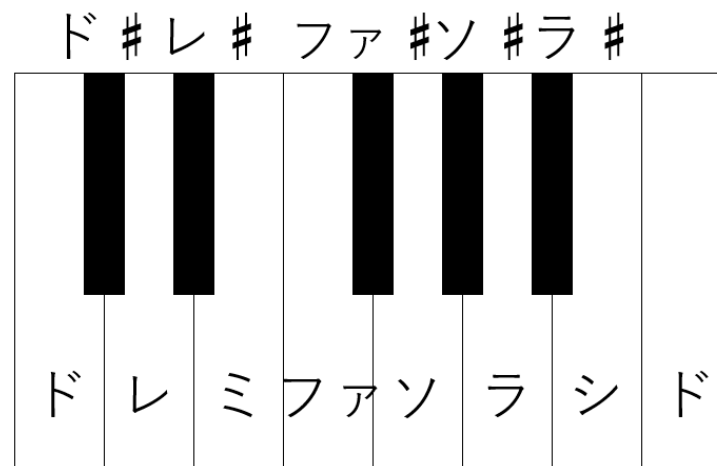


■ 純正律

純正律長音階…ある音を 1 としたとき長 3 度を $\frac{5}{4}$ としたものの

数列と振動数の比

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{8}(n-1) & (n = 1, 2, 3, 5) \\ \frac{4}{3} + \frac{1}{6}(n-4) & (n = 4, 5, 6, 8) \\ 1 + \frac{1}{8}n & (n = 7, 8) \end{cases}$$



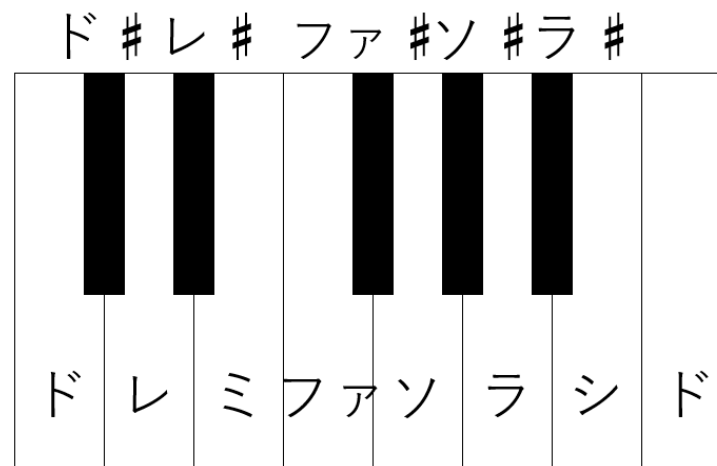
音名	ド	ド #	レ	レ #	ミ	ファ	ファ #	ソ	ソ #	ラ	ラ #	シ	ド
n	1		2		3	4		5		6		7	8
a_n	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2

■ 純正律

純正律短音階…ある音を 1 としたとき短 3 度を $\frac{6}{5}$ としたもの

数列と振動数の比

$$b_n = \begin{cases} a_n & (n = 1, 2, 4, 5, 8) \\ \frac{6}{5} + \frac{1}{5}(n - 3) & (n = 3) \\ \frac{6}{5} + \frac{1}{5}(n - 4) & (n = 6, 7, 8) \end{cases}$$

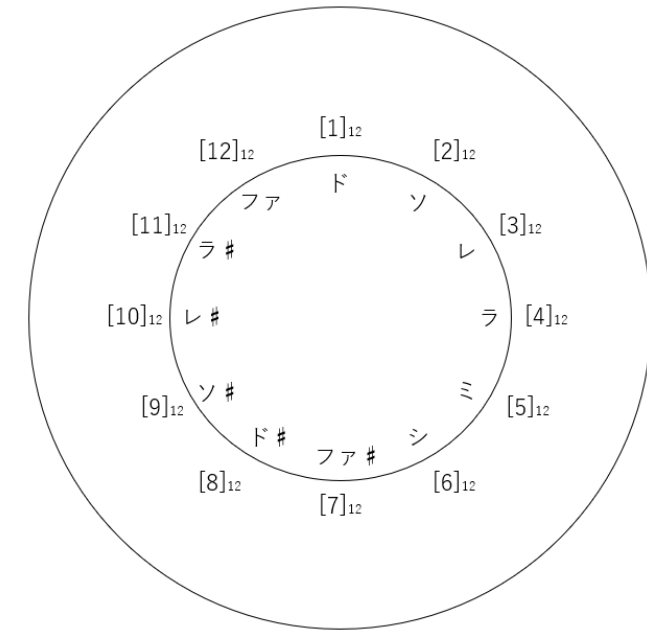


音名	ド	ド #	レ	レ #	ミ	ファ	ファ #	ソ	ソ #	ラ	ラ #	シ	ド
n	1		2	3		4		5	6		7		8
a_n	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$		$\frac{9}{5}$		2

■ ピタゴラス音律

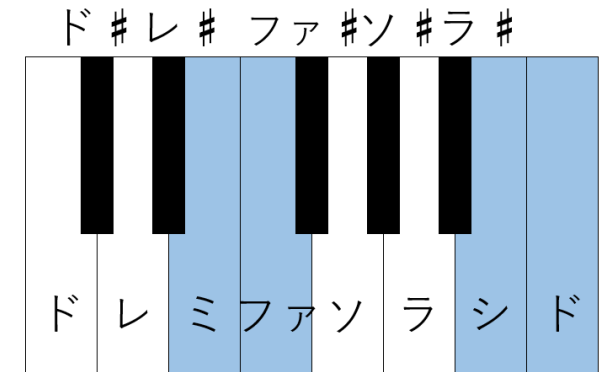
最も協和する $2:3$ の音程関係, すなわち 完全5度の協和性をもとにつくられ, 人類が最も長く使ってきた等比数列による音律

間に黒鍵が含まれていない連続する白鍵が1つあるもの



5 度圏

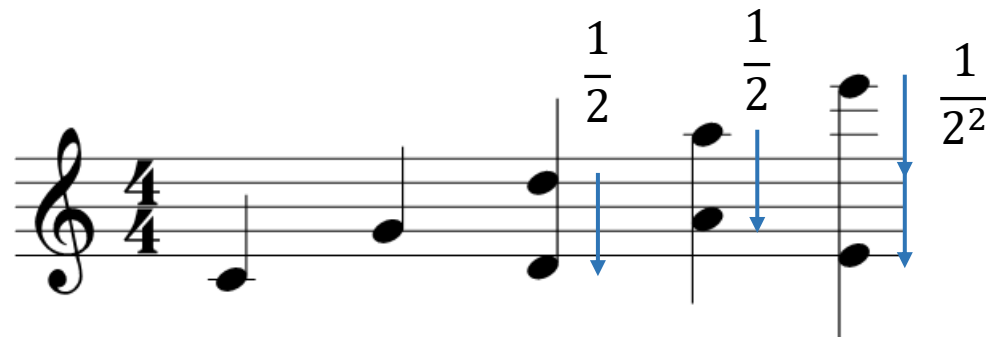
オクターブ関係にある音程の比は $1:2$ となつて同じ音とみなされる。



それぞれの音は 12 を法として一意に定まる。

■ ピタゴラス音律

数列と振動数の比



$$R_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{2^p}$$

— もとのドと同じオクターブへ下げるための変数

音名	ド	ド #	レ	レ #	ミ	ファ	ファ #	ソ	ソ #	ラ	ラ #	シ	ド
n	1	8	3	10	5	12	7	2	9	4	11	6	13
p	0	4	1	5	2	6	3	0	4	1	5	2	6
a_n	1	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7}{2^4}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^9}{2^5}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{2^2}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{11}}{2^6}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6}{2^3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^8}{2^4}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{2}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{2^5}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5}{2^2}$	$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^6}$

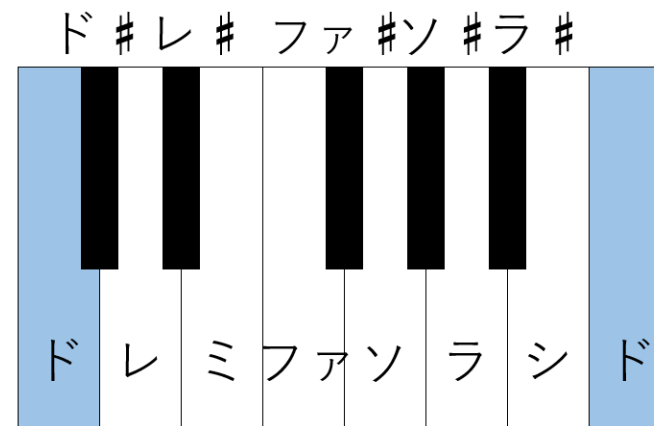
■ ピタゴラス音律

$n = 1$ のときと $n = 13$ のときの R_n はオクターブ関係のため、
1:2 になるはずである。

しかし、 $n = 13$ のとき、

$$R_{13} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^6} = 2.02728652$$

この誤差を**ピタゴラス・コンマ**という。



■ 平均律

ピタゴラス・コンマを出さないために，1 オクターブを 12 の等比的に均等な音程に分割した音律

他の音律と比較して最もバランスの良い音律であり，どの音からでも同じ比率の音階をつくることができ転調が自然なため，現代で最もよく使われる音律となった。

数列と振動数の比

$$E_n = 2^{\frac{n-1}{12}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

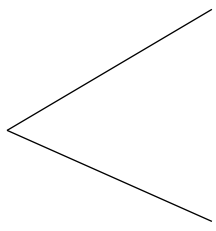
音名	ド	ド #	レ	レ #	ミ	ファ	ファ #	ソ	ソ #	ラ	ラ #	シ	ド
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
E_n	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

■平均律

3つの音律はそれぞれ異なる目的でつくられたものである。

- ・ 協和する和音をつくる → 純正律
- ・ 自然なメロディーを生み出す → ピタゴラス音律
- ・ 自然に転調する → 平均律

同時に成り立つか？

音律がつくる音同士の協和関係  $\left\{ \begin{array}{l} \text{等差数列} \rightarrow \text{有理数} \\ \text{等比数列} \rightarrow \text{無理数} \end{array} \right.$

今日までこれを解決するため様々な調律法が開発されたが、この本質がある限り完全に解消することはできないといえる。

■ おわりに

歌の発生には数が深く関わっていた。

音階や音律をつくるときに、数学の規則性が現れている。

皆さんも身近な分野から数学との関係性を探してみてください！

■参考文献

- [1] 桜井進・坂口博樹著, 音楽と数学の交差, 大月書店, 2011年
- [2] 音階の数学 <https://note.com/geekdrums/n/nfa5f24b40069>, 参照日 2023年2月27日
- [3] 音律とは? ~純正律、平均律、ピタゴラス音律の特徴~
<https://tabatalabo.com/musical-temperament>, 参照日 2023年2月27日