巡回セールスマン問題を解きたい！

BV21013 堀毛晴輝

May 16, 2023

はじめに

はじめに

あるアニメ[1]で巡回セールスマン問題が取り上げられました[2]．これにより(？)，この問題を知っている人は比較的多いのではないでしょうか．

今回は，この問題について厳密解を求めるアルゴリズムと，近似解を効率よく求める手法について紹介します．

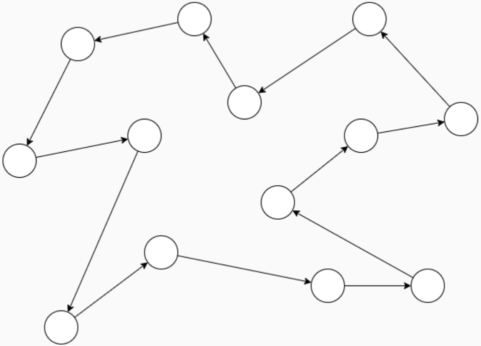
---

[1]理系が恋に落ちたので証明してみた。
[2]私は見ていません．

巡回セールスマン問題とは？

巡回セールスマン問題とは？

与えられた都市の集合に対して，全ての都市を一度だけ訪れ，出発点に戻る最短経路を求める問題を**巡回セールスマン問題**といいます．



巡回セールスマン問題とは？

N 個の都市があるとき，すべての都市を巡回して戻ってくるルートは $N!$ 通り存在します．

すべての経路を試して最短経路を求めようとすると $\ldots$

$$\begin{aligned} N = 10 \text{ のとき}: &\quad 3628800 \quad \text{通り} \\ N = 20 \text{ のとき}: &\quad 2432902008176640000 \quad \text{通り} \\ N = 100 \text{ のとき}: &\quad 9.3326\ldots \times 10^{157} \quad \text{通り} \end{aligned}$$

について経路の長さをそれぞれ求めることになり，N が大きいとこの愚直解法はとても困難です．

アルゴリズム的なアプローチ

アルゴリズム的なアプローチ

先述した “すべての経路を愚直に試し，最短経路を求める” という手法だと，$\Omega(N!)$ かかりますが，ヘルドカープのアルゴリズムを用いると，$O(N^2 2^N)$ で解くことができます！

大体 10^8 回くらいの処理が 1 秒に行えると仮定すると，$N = 20$ のとき愚直解法では約 15429 年くらい[3] かかりますが，ヘルドカープのアルゴリズムを用いると約 4 秒で求めることができるようになります．

ヘルドカープのアルゴリズムは，動的計画法を用いた手法です．

[3] $N!$ 通りのルートに対して，N 回の計算をして長さを求める，つまり $\Theta(N \cdot N!)$ のとき

動的計画法

動的計画法の例として，次の問題を考えます．

うさぎのつがい問題

1 つがいのうさぎは産まれて 2ヶ月後から，毎月 1 つがいのうさぎを産むとします．今，産まれたばかりの 1 つがいのうさぎがいます．n ヶ月後には，うさぎは合計何つがいになっているでしょうか？ (1 つがいとは，オスとメスの組のことです．)

n ヶ月後のうさぎのつがいの数を F_n と書くことにします．

問題より，$F_1 = 1$ です．また，このうさぎのつがいは産まれたばかりなので，2ヶ月目には子供を生むことはできません．これより，$F_2 = 1$ です．

以降，$n \geq 3$ の時について考えます．

動的計画法

うさぎのつがい問題

1 つがいのうさぎは産まれて 2ヶ月後から，毎月 1 つがいのうさぎを産むとします．今，産まれたばかりの 1 つがいのうさぎがいます．n ヶ月後には，うさぎは合計何つがいになっているでしょうか？（1 つがいとは，オスとメスの組のことです．）

n ヶ月後のうさぎのつがいの数は，$n-1$ ヶ月後の新たに生まれたうさぎのつがいの数と，元からいるうさぎのつがいの数が分かれば求めることができます．

- 新たに産まれたうさぎのつがいの数：
  $n-2$ ヶ月後のうさぎのつがいの数の差です．すなわち，$F_{n-1} - F_{n-2}$ です．
- 元からいるうさぎのつがいの数：
  $n-2$ ヶ月後のうさぎのつがいの数です．つまり，F_{n-2} です．

動的計画法

うさぎのつがい問題

1 つがいのうさぎは産まれて 2ヶ月後から，毎月 1 つがいのうさぎを産むとします．今，産まれたばかりの 1 つがいのうさぎがいます．n ヶ月後には，うさぎは合計何つがいになっているでしょうか？ (1 つがいとは，オスとメスの組のことです．)

$n-1$ ヶ月後に . . .

- 新たに産まれたうさぎのつがいの数：$F_{n-1} - F_{n-2}$
- 元からいるうさぎのつがいの数：F_2

新たに産まれたうさぎは子供を生まなくて，元からいるうさぎは子供を生むことに注意して，

$$F_n = (F_{n-1} - F_{n-2}) + 2F_{n-2} = F_{n-1} + F_{n-2}$$

動的計画法

うさぎのつがい問題

1 つがいのうさぎは産まれて 2ヶ月後から，毎月 1 つがいのうさぎを産むとします．今，産まれたばかりの 1 つがいのうさぎがいます．n ヶ月後には，うさぎは合計何つがいになっているでしょうか？ (1 つがいとは，オスとメスの組のことです．)

これにより，解きたい問題 “n ヶ月後のうさぎのつがいの数” を，それより小さい問題 “$n-1$ ヶ月後のうさぎのつがいの数” と “$n-2$ ヶ月後のうさぎのつがいの数” に分割できました！[4]

分割した問題について，また同様に分割をすることで，最終的に解きたい問題の答えを求めることができます．このような手法を**動的計画法**といいます．

[4] n ヶ月後のうさぎのつがいの数は，じつはフィボナッチ数列の第 n 項目の値と一致する！

ヘルドカープのアルゴリズム

N 個の都市がある巡回セールスマン問題，つまり，頂点集合 $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ に対して 1 からスタートし，V の頂点をすべて訪れて 1 に戻る最短経路を求める問題を考えます．[5]

以下，頂点 u から頂点 v への距離を $d_{u,v}$ と表します．

$$f(S, v) := 1 \text{ からスタートし } S \text{ の各頂点をすべて訪れ } v \text{ にいる最短経路の長さ}$$

という関数を考えます．ここで，S は V の部分集合であり，$v \in S$ とします．この関数の値が求められたら，解きたい問題の解は，$\min_{v \in V} \{f(V, v) + d_{v,1}\}$ です．

[5] すべての頂点を通るため，頂点 1 からスタートする最短経路を考えてもよいです．

ヘルドカープのアルゴリズム

$$f(S, v) := 1 \text{ からスタートし } S \text{ の各頂点をすべて訪れ } v \text{ にいる最短経路の長さ}$$

この関数 $f(S, v)$ を求めたいです．まず，$f(\{1\}, 1) = 0$ です (1 からスタートして今 1 にいるので，距離は 0 です)．

S が $\{1\}$ でないときの $f(S, v)$ の値を考えます．

$S \backslash \{v\}$ について，$s \in S \backslash \{v\}$ とすると，$f(S \backslash \{v\}, s)$ は，“$S \backslash \{v\}$ の各頂点をすべて訪れて s にいるときの最短経路の長さ” でした．

ヘルドカープのアルゴリズム

$f(S,v) :=$ 1 からスタートし S の各頂点をすべて訪れ v にいる最短経路の長さ

$f(S\backslash\{v\},s)$ から v に移動することを考えると，その値 $f(S\backslash\{v\},s)+d_{s,v}$ は "S の各頂点をすべて訪れて v にいる最短経路の長さの候補" になります．求める値は候補のうちでもっとも小さいものになるので，

$$f(S,v) = \min_{s\in S\backslash\{v\}} \{f(S\backslash\{v\},s)+d_{s,v}\}$$

で求めることができます！

求めたい値は $\min_{v\in V}\{f(V,v)+d_{v,1}\}$ だったので，先ほどの式を用いて求めればよいです．計算量は $O(N^2 2^N)$ になります．

ヒューリスティック的なアプローチ

ヒューリスティック的なアプローチ

先ほどのヘルドカープのアルゴリズムでは，$N \leq 20$ 程度までなら実用的な時間で解くことができますが，それを超えると指数的に実行時間が長くなるため，解くことが困難です．

厳密解を求めることを考えていましたが，今度は近似解を求めることを考えます．

ここでいう近似解とは,「最適解には達しないが，比較的良い解」のことです．

山登り法

ある問題に対して，現在の解を少し変化させて良くなったら採用し，これを繰り返すことで答えをどんどん良くしていく手法を山登り法といいます．

巡回セールスマン問題に対しても，山登り法を用いることで近似解を求めることができます．具体的に，以下のような手順で近似解を求めます．

1. ランダムな順列を生成する (初期解)
2. 以下を繰り返す
   2.1 現在の解を少し変化させる (近傍解)
   2.2 現在の解より近傍解のほうが良ければ，近傍解を現在の解とする

山登り法

ここでは，近傍解を求める方法を「ランダムに 2 つの都市を選び，訪れる順番を入れ替える」として考えてみます．

!!実演!!

ランダムな初期解から時間が経つにつれて，解が良くなっていくことがわかります．これが山登り法です．

山登り法は，最適解に到達する保障はありませんが，近傍解を効率的に生成できる場合，比較的シンプルに近似解を求めることができます．しかし，局所最適解に陥りやすかったり，初期解や近傍解の生成方法によっては良い解にたどり着けない場合もあります．

2-opt

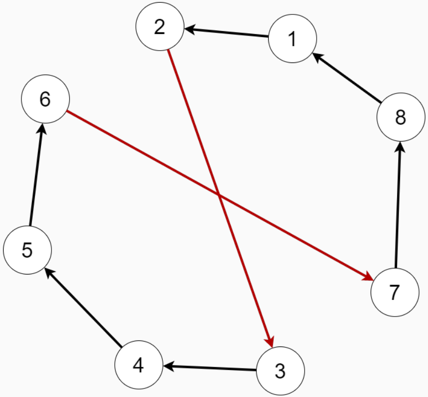
先ほどは近傍解の生成方法を「ランダムに 2 つの都市を選び，訪れる順番を入れ替える」としましたが，このほかにも様々な近傍解の作り方が考えられます．

ここでは，近傍解の生成方法の 1 つである 2-opt について紹介します．

2-opt とは，現在の解の中で 2 つの都市を選び，その間の順番を逆にすることで近傍解を作ります．

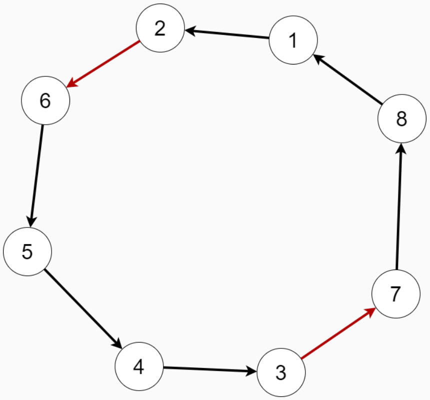
2-opt

例えば，次のように $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ の順で都市を訪れる解があったとします．



2-opt

ここで，3 と 6 を選び，その間の訪れる順番を逆にすると，次のようになります:



2-opt

訪れる順序を一部逆にすることで，交差していた部分が解消されることで距離が短くなります！

!!実演!!

2-opt を用いることで，先ほどの山登り法よりも良い解を求めることができました！

このように，よい効率の良い近傍解の生成方法を考えることで，山登り法の性能を向上させることができます.

おわりに

まとめ

- 巡回セールスマン問題とは，N 個の都市をすべて訪れて戻ってくる最短経路を求める問題！
- N が大きくなると経路の数が爆発的に増えるため，厳密解を求めるのは難しい！
  - ヘルドカープのアルゴリズムを用いると，$N \geq 20$ 程度までなら実用的な時間で解くことができる！
- 近似会を求めることもできる！
  - 山登り法を用いると，ランダムな初期解からどんどん解がよくなる！
  - 2-opt 法など，近傍解を効率的に生成できるとより良い近似会が求められる！

参考文献

- ビット DP(bit DP) の考え方　集合に対する動的計画法 `https://algo-logic.info/bit-dp/`, 2023 年 5 月 16 日閲覧.
- Qiita 2-opt の実装 `https://qiita.com/hotpepsi/items/424f9491e7baaa63b6ce`, 2023 年 5 月 16 日閲覧.