# 2023 年度芝浦祭 懸賞問題 解答

**解答** 1: 9

レベル 1 のスライム 2023 匹は，レベル 2 のスライム 1011 匹と，レベル 1 のスライム 1 匹になります．これを繰り返していけばよいです．

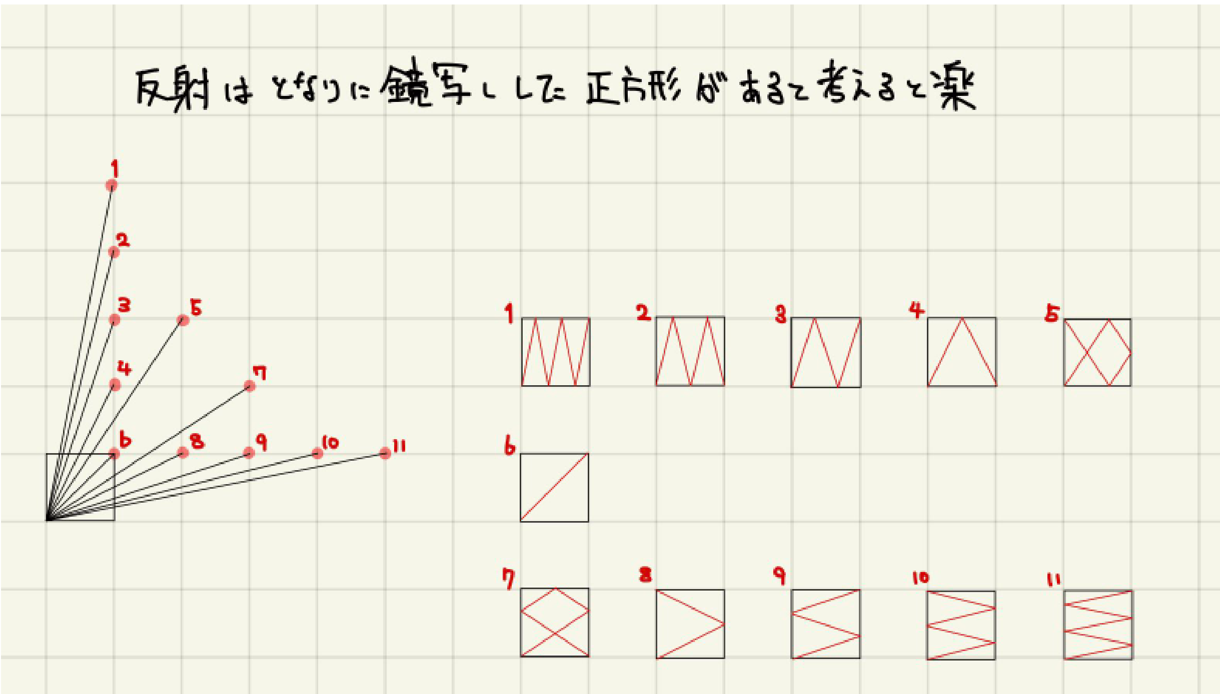
じつは，二進数で表したときの 1 の個数と一致します． $(2023)_{10} = (11111100111)_2$ であり，1 の個数は 9 個なので，最終的に残るスライムの数は 9 匹です．

**解答** 2: 5100

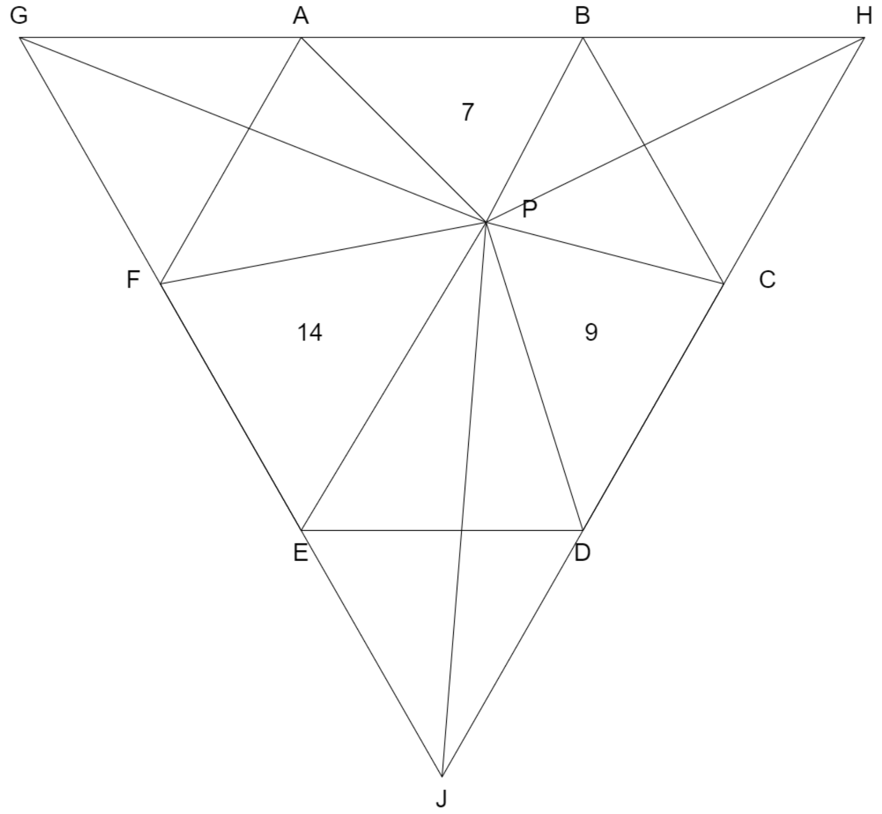
トッピングは 3 種類あり，それぞれのトッピングについて，追加するかしないかの 2 通りがあります．これにより，トッピングを抜いた，牛丼のみの価格は $500 \times 2^3 = 4000$ 円です．

トッピングについて考えます．チーズがトッピングされるような牛丼の個数は， $2^2$ 個です．同様に，温玉，ネギがトッピングされるような牛丼の個数は $2^2$ 個数です．また，チーズと温玉を同時にトッピングされるような牛丼の個数は $2^1$ 個です．チーズと温玉を同時にトッピングしたとき， 50 円引きとなることに注意すると，トッピングのみの価格は $(150 + 100 + 50) \times 2^2 - 50 \times 2^1 = 1100$ 円です．よって，総額は $4000 + 1100 = 5100$ 円です．

**解答** 3: 11




**解答** 4: 11




図のように補助線を引きます．このとき， $ABCDEF$ が正六角形であったことから， $\triangle GHJ$ は正三角形です．$\triangle AGP, \triangle BHP$ の面積は，底辺と高さが等しいため $\triangle ABP$ の面積と等しいです．同様に，$\triangle CHP, \triangle DJP$ の面積は $\triangle CDP$ と，$\triangle EJP, \triangle FGP$ の面積は $\triangle EFP$ と等しいです．このことから，$\triangle GHJ$ の面積は $3(7+9+14) = 90$ で， $\triangle GAF$ の面積は $90/9 = 10$ となります．

四角形 $GAPF$ の面積は $7 + 14 = 21$ なので，そこから $\triangle GAF$ の面積 10 を引くと，求めたい $\triangle AFP$ の面積がわかります．$21 - 10 = 11$ となり，面積は 11 です．

**解答** 5: 1: 7232 , 2: 135

行のラベルを $r_1, \ldots, r_n$ ，列のラベルを $c_1, \ldots, c_m$ とします．このとき，表の総和は分配法則より，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_i c_j = \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{m} c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)$$

と積の形で表せます．これより，総和は行/列のラベルの和のみによって決まることがわかります．これが 2023 となるには，$(\sum r_i, \sum c_j) = (1, 2023), (7, 289), (17, 119), (119, 7), (289, 7)\ (2023, 1)$ のいずれかである必要があります．

$(1, 2023)$ のとき，$\sum_{i=1}^{2} r_i = 1$ を満たすような正の整数列 $r$ は存在しないため，$2 \times 2$ の表は存在しません．$(2023, 1)$ についても同様です．

$(7, 289)$ のとき，$\sum_{i=1}^{2} r_i = 7$ を満たすような正の整数列 $r$ は 6 通り，$\sum_{j=1}^{2} c_j = 289$ を満たすような正の整数列 $c$ は 288 通り存在します．よって， $2 \times 2$ の表は $6 \times 288 = 1728$ 個存在します．$(289, 7)$ についても同様です．

$(17, 119)$ のとき，先ほどの議論と同様に $(17-1) \times (119-1) = 1888$ 通り存在します．

これより， $2 \times 2$ の表は， $1728 \times 2 + 1888 \times 2 = 7232$ 通り存在します．

条件を満たすすべての表の数を考えます．

ここで，総和が $x$ になるような数列 $r_1, \ldots$ の個数は，$x-1$ 個の区切りを選ぶことと同じなので， $2^{x-1}$ と求められます．

$(1, 2023)$ のとき，行の決め方は $2^{1-1} = 1$ ，列の決め方は $2^{2023-1} = 2^{2022}$ なため，表の数は $2^{2022}$ 通り存在します．$(2023, 1)$ についても同様です．

$(7, 289)$ のとき，行の決め方は $2^6$ ，列の決め方は $2^{288}$ なため，表の数は $2^{294}$ 通り存在します．$(289, 7)$ についても同様です．

$(17, 119)$ のとき，行の決め方は $2^{16}$ ，列の決め方は $2^{118}$ なため，表の数は $2^{134}$ 通り存在します．$(117, 17)$ についても同様です.

これより，条件を満たすすべての票の数は,

$$\begin{aligned} & 2^{2022} \times 2 + 2^{294} \times 2 + 2^{134} \times 2 \\ = \ & 2^{2023} + 2^{295} + 2^{135} \\ = \ & 2^{135}(2^{1888} + 2^{160} + 1) \end{aligned}$$

$(2^{1888} + 2^{160} + 1)$ は奇数なので，これ以上 2 で割れません．よって，答えは 135 です.