次元の違うユークリッド空間は同相でない

数理科学研究会 bv22321 木村 敏樹

2023 年 10 月 31 日

1　研究背景

今回の発表で私はトポロジーの手法を簡単に紹介したいと考えた．そこで次の定理を証明することを最終目的に設定した．

Theorem.

次元の異なるユークリッド空間は位相空間として同相でない:

$$n \neq m \Rightarrow \mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m.$$

大学数学における幾何学では，ある空間における図形同士の関係やその構造を調べる．その中でも特にトポロジー (位相幾何学) という分野では，連続という概念を数学的に扱える空間における図形同士の関係やその構造なかどといった性質に目を向ける．取り分け，ホモロジー論においては結局のところは位相空間と円板たちとの関係を記述しているにすぎない．今回はその関係を考える一つの題材として上の定理を証明する．この定理は非常にイメージが湧きやすいが，一筋縄ではいかない例として適切である．また同時に，トポロジーで重要になる球面の扱いが非常に多く登場する．以上がこの定理の証明を追うことがトポロジーの手法を紹介するに適切と考えた理由である．

今回の命題のほとんどを [河澄] から用意した．証明の不明瞭な箇所やより深く学びたい部分は各自参照されたい．

2　準備

2.1　ユークリッド空間

Definition. 2.1 (ユークリッド空間)

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とかく．整数 $N \geqq 0$ について直積 $\mathbb{R}^N = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{N}$ にユークリッドノルムによって位相を入れたものをユークリッド空間 (Euclid space) という．また，この N をユークリッド空間の次元という．

Definition. 2.2 (ユークリッドノルム)

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．ユークリッドノルム (Euclid norm) とは次の式により定義される値のことである:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=0}^{N} {x_i}^2}, \quad x = (x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Proposition 2.3

ユークリッドノルムは次の 4 条件をみたす:

1. $^\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, \|x\| \geqq 0,$
2. $^\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, \|x\| = 0 \iff x = 0,$
3. $^\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, ^\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$
4. $^\forall x, ^\forall y \in \mathbb{R}^{N+1}, \|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|.$

2.2 位相空間

Definition. 2.4 (位相空間)

X を空でない集合とする．次の 3 条件を満足する X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ を与えた集合 X を位相空間 (topological space) といい，$(X, \mathcal{O})$ と表す:

[O$_1$] $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O},$
[O$_2$] $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathcal{O},$
[O$_3$] $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}$ とすれば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}.$

また，$\mathcal{O}$ を位相 (topology) といい，$\mathcal{O}$ に属する X の部分集合を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開集合 (open set) という．

位相空間は連続性に関する議論を行うための舞台といえる．

Definition. 2.5 (連続写像)

X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続であるとは，位相空間 Y の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ が X の開集合となることである．ここで，$f^{-1}(O) = \{x \in X; f(x) \in O\}$ は O の逆像 (inverse image) である．

上で定義した連続性は $\varepsilon - \delta$ 論法で記述される定義と同値である:

$$^\forall \varepsilon > 0, ^\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

距離に関する情報なしに連続が定義されるところに位相空間の便利さがある．

Definition. 2.6 (同相写像)

位相空間 X と Y についての連続写像 $f : X \to Y$ が同相写像 (homeomorphism) であるとは，連続な逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ をもつこと，すなわち

1. f は全単射,
2. f は連続,
3. 逆射像 f^{-1} も連続,

であるときにいう.

Definition. 2.7 (同相)

位相空間 X と Y が同相 (homeomorphic) であるとは，同相写像 $f : X \to Y$ が存在するときにいい,

$$X \approx Y$$

と表す.

位相空間が同相であるとは，つまりある位相空間に同相な位相空間は，その位相空間の持つ位相的性質のみをもつということである．位相的性質とは同相写像で変化しない性質である位相不変量としてコンパクト性やハウスドルフ性などがある．もしコンパクト空間からの同相写像があれば，写像の先はコンパクト空間になる．同様にして，ハウスドルフ空間でない空間からの同相写像の先がハウスドルフ空間になることもあり得ない.

3　ユークリッド空間の同相について

3.1　弧状連結

Definition. 3.1 (弧状連結)

空でない位相空間 X が弧状連結であるとは，任意の 2 点 $x_0, x_1 \in X$ について x_0 を x_1 につなぐ連続写像が存在するときにいう：

$$^\forall x_0 \in X, {}^\forall x_1 \in X, {}^\exists l \in [0,1] \to X \quad \text{s.t.} \quad l(0) = x_0, l(1) = x_1.$$

Lemma 3.2

任意の正の整数 $N > 0$ についてユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ は弧状連結である.

Proof. 任意の 2 点 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N$ について連続写像 $l : [0,1] \to \mathbb{R}^N, t \mapsto l(t) \coloneqq (1-t)x_0 + tx_1$，は $\mathbb{R}^N$ 内で x_0 を x_1 につなぐ路になる．したがって，任意の 2 点をつなぐ連続写像が存在したので，$\mathbb{R}^N$ は弧状連結である． □

Theorem 3.3

位相空間 Y が弧状連結な位相空間 X に同相ならば，Y も弧状連結である．

Proof. 位相空間 X と Y は同相であるから同相写像 $f: X \to Y$ が存在する．また，位相空間 X は弧状連結であるから，X 内の任意の 2 点 x_0, x_1 を結ぶ路 $l: [0,1] \to X$,

$$l(0) = x_0, \quad l(1) = x_1$$

をもつ．このとき合成写像 $f \circ l: [0,1] \to Y$ を考えると，

$$f \circ l(0) = f(x_0), \quad f \circ l(1) = f(x_1)$$

をみたし，これは Y 内の 2 点 $f(x_0), f(x_1)$ を結ぶ路となる．ここで，f は同相写像であるから全単射写像であるので，X 内で任意の 2 点を選ぶことによりその 2 点を同相写像 f で写した 2 点は Y 内の任意の 2 点とみなすことができる．したがって，$f(x_0) = y_0, ; f(x_1) = y_1$ とおくことにより，任意の 2 点 $y_0, y_1 \in Y$ について y_0 を y_1 につなぐ連続写像 $f \circ l$ が存在したので，位相空間 Y は弧状連結であることが示された． □

Lemma 3.4

平面から原点 0 を除いた空間 $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ は弧状連結である．

Proof. 任意の 2 点 $p_0, p_1 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ について p_0 を p_1 につなぐ $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ 内の路を構成すればよい．極座標によって

$$p_0 = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0), p_1 = (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1), r_0, r_1 > 0, 0 \leq \theta_0, \theta_1 < 2\pi$$

と表す．このとき連続写像 $l: [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ を

$$l(t) \coloneqq (r_t \cos\theta_t, r_t \sin\theta_t), r_t \coloneqq (1-t)r_0 + tr_1, \theta_t \coloneqq (1-t)\theta_0 + t\theta_1, (0 \leq t \leq 1)$$

で定義すると，

$$l(0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0) = p_0, l(1) = (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1) = p_1$$

であるから，l は p_0 を p_1 につなぐ $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 内の路である．したがって，$\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ は弧状連結であることが示された． □

Lemma 3.5

$c \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R} \backslash \{c\}$ は弧状連結でない．

Proof. $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{c\}$ を $a < c < b$ となるようにとると，中間値の定理により，a と b をつなぐ $\mathbb{R}$ 内の路 $l: [0,1] \to \mathbb{R}$ は必ず c を通る．つまり，a と b をつなぐ $\mathbb{R} \backslash \{c\}$ 内の路は存在しない．したがって，$\mathbb{R} \backslash \{c\}$ は弧状連結でないことが示された． □

Theorem 3.6

直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ は同相でない:$\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^2$.

Proof. 背理法により示す．$\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$ とし，同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在したと仮定する．このとき，原点 $0 \in \mathbb{R}^2$ について，同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \backslash \{f(0)\}$ が得られる．**Lemma 3.4** により $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ は弧状連結であり，また f は同相写像であるから **Lemma 3.3** により $\mathbb{R} \backslash \{f(0)\}$ も弧状連結であることが分かる．しかし，これは **Lemma 3.5** で得た事実に反する．これは矛盾である．したがって，仮定を否定することにより $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^2$ が得られる． □

3.2 ホモトピー集合，ホモロジー群

いま，1 次元ユークリッド空間と 2 次元ユークリッド空間が同相でないことが確認できた．しかしこれよりも次元が大きくなると弧状連結性では証明ができない[*1]．より高次じげんのユークリッド空間を扱うために，ホモトピーという概念を導入する．

$*$ この範囲は今回の目標の定理の証明の準備において必要であるが重要度は低いため，読み飛ばしても良い．

Definition. 3.7 (ホモトピー集合)

位相空間 X の上の同値関係による商集合を

$$\pi_(X) := X/\sim = \{\{x_1 \in X; x_1 \sim x_0\}; x_0 \in X\}$$

で表し，位相空間 X の第 0 ホモトピー集合 (the 0-th homotopy set) とよび，その元を X の弧状連結成分 (path-component) とよぶ.

Definition. 3.8 (自由加群)

S を集合とする．集合 S の有限個の元の形式的な一次結合を $\mathbb{Z}S$ と表し，集合 S の生成する自由加群とよぶ:

$$\mathbb{Z}S := \left\{ \sum_{s \in S} a_s s (\text{形式和}); a_s \in \mathbb{Z}, \text{有限個の } s \in S \text{ を除いて } a_s = 0 \right\}.$$

Definition. 3.9 (第 0 ホモロジー群)

第 0 ホモトピー集合 $\pi_0(X)$ の生成する自由加群を

$$H_0(X) = H_0(X; \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}\pi_0(X)$$

で表し，位相空間 X の第 0 ホモロジー群とよぶ.

3.3 目標の定理の証明

それでは一般の次元に対して，目標の定理の証明を行う．必要な概念を前節で導入した概念の拡張として適宜用意し議論を進める．

[*1] $n \geq 2$ のとき，$\mathbb{R}^n \backslash \{c\}, {}^\forall c \in \mathbb{R}^n$ は弧状連結であるからである．

Definition. 3.10 (n 次元球面)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，n 次元球面とは以下で定義される $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間のことである:

$$S^n \coloneqq \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}.$$

Lemma 3.11

S^n を n 次元球面，$P \coloneqq (0, \ldots, 0, 1), Q \coloneqq (0, \ldots, 0, -1) \in S^n$ とおき，S^n の開被覆 $\{U, V\}$ を

$$U \coloneqq S^n \backslash \{Q\}, \quad V \coloneqq S^n \backslash \{P\}$$

とする．このとき次の同相が成り立つ．

1. $U \approx V \approx \mathbb{R}^n$.
2. $U \cap V \approx \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Proof. それぞれについて，同相写像を構成すればよい．今回は立体射影を用いて連続な逆写像をもつような写像を構成する．

1. U 上の任意の点 x と Q を結ぶような直線と $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ との交点を $(f(x), 0)$ とおく．これを具体的に書くと
$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{(x_0, \ldots, x_{n-1})}{1 + x_n}$$
と表されるから，$f : U \to \mathbb{R}^n$ は連続である．この写像の逆写像 $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to U$ も
$$f^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{(2y_1, \ldots, 2y_n, 1 - \|y\|)}{1 + \|y\|^2}, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$
となるから，連続である．ここで，$\|y\|$ はユークリッドノルムである．ゆえに同相 $U \approx \mathbb{R}^n$ が得られる．V についても同様にして同相 $V \approx \mathbb{R}^n$ が得られる．
2. 上と同様に $U \cap V$ に制限することによって同相 $U \cap V \approx \mathbb{R} \backslash \{0\}$ が得られる．

□

Definition. 3.12 (第 q ホモロジー群)

非負整数 $q \geq 0$ と位相空間 X に対して，空間 X の第 q ホモロジー群とよばれる加群 $H_q(X)$ が対応し，位相空間 X と位相空間 Y との間の連続写像 $f : X \to Y$ に対して f の誘導準同型とよばれる準同型写像

$$f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$$

が対応する．

Definition. 3.13 (ホモトピック)

連続写像 $f: X \to Y$ と $g: Y \to X$ がホモトピック (homotopic) であるとは，すべての $x \in X$ について

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

をみたす連増写像 $F: X \times [0, 1] \to Y$ が存在することをいう．このことを記号で次のように表す:

$$f \simeq g : X \to Y.$$

Definition. 3.14 (ホモトピー同値写像，ホモトピー逆)

連続写像 $f: X \to Y$ がホモトピー同値写像 (homotopy equivalence) であるとは, 連続写像 $g: Y \to X$ が存在して

$$g \circ f \simeq 1_X : X \to X, \quad f \circ g \simeq 1_Y : Y \to Y$$

が成り立つことをいう．このとき，g を f のホモトピー逆 (homotopy inverse) とよぶ.

Lemma 3.15

以下の二つのホモトピー同値が成り立つ.

1. $U \simeq V \simeq *$.
2. $U \cap V \simeq S^{n-1}$.

Proof.

1. **Lemma 3.11** により $U \approx V \approx \mathbb{R}^n$ が成り立つから，ホモトピー同値 $\mathbb{R}^n \simeq *$ を示せばよい．2 つの連続写像

   $$r: \mathbb{R}^n \to \{*\}, y \mapsto *, \quad i: * \to \mathbb{R}^n, * \mapsto 0$$

   が互いにホモトピー逆であることを示す．明らかに $r \circ i = 1_*$ である．また，連続写像

   $$F: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n, F(y, t) \coloneqq ty,$$

   は任意の $y \in \mathbb{R}^n$ について

   $$i \circ r(y) = F(y, 0), \quad F(y, 1) = 1_{\mathbb{R}^n}(x)$$

   をみたす．ゆえに

   $$1_{\mathbb{R}^n} \simeq i \circ r,$$

   つまり r と i は互いにホモトピー逆である．したがってホモトピー F の存在が示せたので，写像 r, i はホモトピー同値写像となり，$\mathbb{R}^n, *$ はホモトピー同値である:

   $$\mathbb{R}^n \simeq *,$$

   すなわち $U \simeq V \simeq *$ が示された.

2. **Lemma 3.11** により $U \cap V \approx \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ が成り立つから，ホモトピー同値 $\mathbb{R}\backslash\{0\} \simeq S^{n-1}$ を示せばよい．包含写像 $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ および連続写像 $r : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ が互いにホモトピー逆であることを示す．いま，明らかに $r \circ i = 1_{S^{n-1}}$ である．さらに連続写像

$$\Phi : (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad (x,t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right) x$$

は，任意の $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ について

$$\Phi(x,0) = i \circ r(x), \quad \Phi(x,1) = 1_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}(x)$$

をみたす．ゆえに

$$i \circ r \simeq 1_{R^n\backslash\{0\}},$$

つまり r と i は互いにホモトピー逆である．したがってホモトピー Φ の存在が示せたので，写像 r, i はホモトピー同値写像となり，$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, S^{n-1}$ はホモトピー同値である:

$$\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \simeq S^{n-1},$$

すなわち $U \cap V \simeq S^{n-1}$ が示された.

□

次に n 次元球面におけるホモロジー群の同型を以下で認める．[*2]

Fact 3.16

$n \geqq 1$ について

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0 \text{ or } n), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

Theorem 3.17

次元の異なるユークリッド空間は位相空間として同相でない:

$$n \neq m \Rightarrow \mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m.$$

Proof. 今，$n \neq m$ であるから，$n > m$ として一般性を失わない．背理法により示す．$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$ とし，同相写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が存在したと仮定する．同相写像であるから逆写像が存在し，それを $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ とする．このとき原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ について，2 つの同相写像

$$f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^m\backslash\{f(0)\} \quad \text{および} \quad f^{-1} : \mathbb{R}^m\backslash\{f(0)\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$

が得られる．第 $n-1$ ホモロジー群に移行する．すると上の二つの写像は以下の準同型写像を誘導する:

$$\begin{aligned} f_* &: H_{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^m\backslash\{f(0)\}) \\ (f^{-1})_* &: H_{n-1}(\mathbb{R}^m\backslash\{f(0)\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}). \end{aligned}$$

[*2] この事実は別途準備が必要になるので，今回は省略する．[河澄] 定理 1.3.7 を参照.

ここで，合成写像

$$(f^{-1})_* \circ f_* : H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$$

は恒等写像である．また，**Lemma 3.15** により $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \simeq S^{n-1}$ および $\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\} \simeq S^{m-1}$ が成り立つから，**Fact 3.16** により $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \neq 0$ であり，$n > m$ とあわせて $H_{n-1}(\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\}) = 0$ である．これは合成写像

$$H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to 0 \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$$

が $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \neq 0$ の恒等写像であることになるが，これは矛盾である．したがって，仮定を否定することにより $\mathbb{R}^n \not\simeq \mathbb{R}^m$ が得られる． □

4　今後の展望

今回はホモロジー群の扱いに慣れる練習となる題材を選択し紹介した．今回はわかりやすくユークリッド空間について扱ったが，より有用な n 次元球面について議論を拡張したいという目標がある．また，単一の空間のみでなく，空間対に対するホモロジー群についての理論，はたまた基本群を導入することにより基本群の高次の概念であるホモトピー群を厳密に定めることでより綿密かつ精巧な議論を構築したい．

参考文献

[河澄] 河澄響矢「トポロジーの基礎」(東京大学出版会),2022 年
[内田] 内田伏一「集合と位相」(裳華房),1986 年
[松本] 松本幸夫「トポロジー入門」(岩波書店),1985 年
[服部] 服部昌夫「位相幾何学」(岩波書店),1979 年