ステップ数でみるコラッツ予想

是川楓季

2023 年 10 月 31 日

目次

1	**はじめに**	2
2	**アプローチ**	2
3	**コラッツ数列とメルセンヌ数**	3
4	**おわりに**	8

1　はじめに

自然数に対して、次のような操作を考える。

定義 1. 写像 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ の作用を、次のように定める。

- 偶数なら、2 で割る
- 奇数なら、3 倍して 1 足す

コラッツ予想とは、次のような予想だった。

予想 (コラッツ予想)**.** 任意の自然数 n に対して、f を有限回作用させることで、1 にすることができる。つまり、次が成り立つ：

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\ \text{s.t.}\ f^i(n)=1 \tag{1}$$

2　アプローチ

さて、私はこの問題に対して、ステップ数から実験・考察を行うことにした。動機としてはもっと単純で、どんな数がコラッツ予想の反例になりそうかということに興味があったのだ。見通しをよくするために (今後使うために)、2 つの写像を定義しておこう。

定義 2. 写像 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ の作用を、次のように定める

- 偶数なら、2 で割る
- 奇数なら、3 倍して 1 足した後、2 で割る

定義 3. 写像 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ の作用を、次のように定める

- 偶数なら、奇数になるまで 2 で割る
- 奇数なら、3 倍して 1 足した後、奇数になるまで 2 で割る

これらの写像はコラッツ予想の主張である (1) の f と取り替えても全く問題ないということがわかるだろう。ではなぜこれらの写像を定義したのだろうか。それは、この問題を別の見方で解釈しやすいからだ。g を用いると、作用させるごとに必ず 2 で割ることなり、この特徴で見ることができる。h を用いると、作用させると必ず奇数になるので、この特徴で見ることができる。

次に、今回の主役である写像たちを定義しよう

定義 4. 写像 $C_f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ を定める。各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $C_f(n)$ の値を次のように定める：

- n がコラッツ予想の反例でなければ、$f^i(n)=1$ となる最小の非負整数
- n がコラッツ予想の反例なら、∞

定義 5. 写像 $C_g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ を定める。各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $C_g(n)$ の値を次のように定める：

- n がコラッツ予想の反例でなければ、$g^i(n) = 1$ となる最小の非負整数
- n がコラッツ予想の反例なら、∞

定義 6. 写像 $C_h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を定める。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_h(n)$ の値を次のように定める：

- n がコラッツ予想の反例でなければ、$h^i(n) = 1$ となる最小の非負整数
- n がコラッツ予想の反例なら、∞

これらの写像は、コラッツ予想の写像を何回合成させると初めて 1 になるかを表している。具体例を確認しておこう。

例 1. 17 に繰り返し $f,\ g,\ h$ を作用させると、

$$
\begin{aligned}
&17 \xrightarrow{f} 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \\
&17 \xrightarrow{g} 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \\
&17 \xrightarrow{h} 13 \to 5 \to 1
\end{aligned}
$$

となる。この文章ではこのようにして得られる数列をそれぞれ、$f,\ g,\ h$ による**コラッツ数列**、あるいは単にコラッツ数列と呼ぶことにする。1 になるまでに作用させた回数を数えることで、

$$C_f(17) = 12,\ C_g(17) = 9,\ C_h(17) = 3$$

を得ることができる。

3　コラッツ数列とメルセンヌ数

この予想を解決する最も簡単な方法は、反例を提示して偽であることを示すことだ。だから反例になりそうな数を調べてみようと思った。まず結果として、次が得られた。

命題 1. 任意の自然数 n と n 未満の非負整数 i について、以下が成り立つ：

$$g^i(2^n - 1) < g^{i+1}(2^n - 1)$$

証明. 具体的に $g^n(2^n - 1)$ まで求めることによって示す。まず、$2^n - 1$ は奇数だから、

$$
\begin{aligned}
g\left(2^n - 1\right) =& \frac{3\left(2^n - 1\right) + 1}{2} \\
=& 3 \cdot 2^{n-1} - 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ。次に、n が 2 以上なら $3 \cdot 2^{n-1} - 1$ は奇数なので、

$$
\begin{aligned}
g^2\left(2^n - 1\right) =& g\left(3 \cdot 2^{n-1} - 1\right) \\
=& \frac{3\left(3 \cdot 2^{n-1} - 1\right) + 1}{2} \\
=& 3^2 \cdot 2^{n-2} - 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ。次に n が 3 以上なら $3^2 \cdot 2^{n-2} - 1$ は奇数なので、

$$\begin{aligned} g^3\left(2^n - 1\right) =& g\left(3^2 \cdot 2^{n-2} - 1\right) \\ =& \frac{3\left(3^2 \cdot 2^{n-2} - 1\right) + 1}{2} \\ =& 3^3 \cdot 2^{n-3} - 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。この操作は同様に n 回続けることができるので、n 未満の非負整数 i に対して、

$$g^i\left(2^n - 1\right) = 3^i \cdot 2^{n-i} - 1$$

が得られる。ここで、n 未満の非負整数 i に対して、

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\left(g^i\left(2^n - 1\right) + 1\right) =& \frac{3}{2}\left(\left(3^i \cdot 2^{n-i} - 1\right) + 1\right) \\ =& \frac{3}{2}\left(3^i \cdot 2^{n-i}\right) \\ =& 3^{i+1} \cdot 2^{n-i-1} \\ =& \left(3^{i+1} \cdot 2^{n-i-1} - 1\right) + 1 \\ =& g^{i+1}\left(2^n - 1\right) + 1 \end{aligned}$$

であることから、

$$g^i\left(2^n - 1\right) < g^{i+1}\left(2^n - 1\right)$$

が導かれる。 ■

系 1. 任意の自然数 n に対して、

$$g^n\left(2^n - 1\right) = 3^n - 1$$

が成り立つ。

さらに、メルセンヌ数ははじめの k ステップで単調に増加する数の中で、最小であることもわかった。

命題 2. 任意の自然数 k に対して、自然数 N に関する条件

$$\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i < k \Rightarrow g^i(n) < g^{i+1}(N)$$

を満たす N の最小値はメルセンヌ数 $M(k) = 2^k - 1$ である。

証明. この証明において、自然数 N に関する命題

$$\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i < k \Rightarrow g^i(n) < g^{i+1}(N)$$

を、$P(N)$ で表すと決めておく。$P(N)$ を満たす自然数 N は、ある自然数 n を用いて $N = n \cdot 2^k - 1$ と表せることを示す。$P(N)$ を満たすためには、$N,\ g(N),\ g^2(N),\ \cdots,\ g^{k-1}(N)$ が全て奇数であることが必要十分条件である。なぜなら、自然数 m が $m < g(m)$ を満たすことは m が奇数であるための必要十分条件だからだ。よって、$N,\ g(N),\ g^2(N),\ \cdots,\ g^{k-1}(N)$ が全て奇数になるような N を調べればよい。

以下、$P(N)$ を満たす N についての議論をする。まず、N は奇数であるから、ある自然数 n_1 を用いて $N=2n_1-1$ と表すことができる。N に g を作用させると、

$$\begin{aligned} g(N) =& g(2n_1-1) \\ =& \frac{3(2n_1-1)+1}{2} \\ =& 3n_1-1 \end{aligned}$$

となる。次に、$g(N)$ は奇数であるから、$3n_1-1$ も奇数である。ゆえにある自然数 a_1 を用いて、$3n_1-1=2a_1-1$ と表すことができる。$3n_1=2a_1$ という関係がわかった。ここで、$n_1,\ a_1$ は自然数だったから、n_1 は偶数でなければならない。だから、n_1 はある自然数 n_2 を用いて、$n_1=2n_2$ と表される。この関係を $N=2n_1-1,\ g(N)=3n_1-1$ に代入すると、

$$\begin{aligned} N =& 2^2n_2-1 \\ g(N) =& 3\cdot 2n_2-1 \end{aligned}$$

がそれぞれ得られる。$g^2(N)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} g^2(N) =& g(3\cdot 2n_2-1) \\ =& \frac{3\left(3\cdot 2n_2-1\right)+1}{2} \\ =& 3^2n_2-1 \end{aligned}$$

となる。同様の議論により、n_2 は偶数であることがわかり、ある自然数 n_3 が存在して、$N,\ g^2(N)$ が

$$\begin{aligned} N =& 2^3n_3-1 \\ g^2(N) =& 3^2\cdot 2n_3-1 \end{aligned}$$

と表せることが示せる。さらに同様の議論を繰り返すことにより、ある自然数 n_k が存在して、

$$\begin{aligned} N =& 2^kn_k-1 \\ g^{k-1}(N) =& 3^{k-1}\cdot 2n_k-1 \end{aligned}$$

が成り立つ。これらは $P(N)$ を仮定した議論であったから、$P(N)$ が成り立つならばある自然数 n が存在して、$N=n\cdot 2^k-1$ と表せることが示せた。ここで、$N=n\cdot 2^k-1$ のとり得る値の最小値は 2^k-1 である。この数が $P(N)$ を満たすことは命題 1 より従う。よって、$P(N)$ を満たす自然数の最小値はメルセンヌ数 $M(k)=2^k-1$ である。 ■

これらのことから、メルセンヌ数 2^n-1 から始める g によるコラッツ数列は、はじめの n 項で単調増加することがわかった。では、メルセンヌ数から始まるコラッツ数列はいつ 1 になるだろうか。つまり、次のことが気になる：

疑問 1. $C_f(2^n-1),\ C_g(2^n-1),\ C_h(2^n-1)$ の挙動はどんなものか

これは実際に計算してみればわかるので、プログラムを動かして 30000 以下の n に対して $C_h(2^n-1)$ を計算した。ここまでは g を使ってきたが、結果の面白さのために C_h を見ることにしよう。結果をプロットした図を以下の図 1 に示す。また、一部を拡大し、わかりやすいように線でつなげたグラフを図 2 に示す。

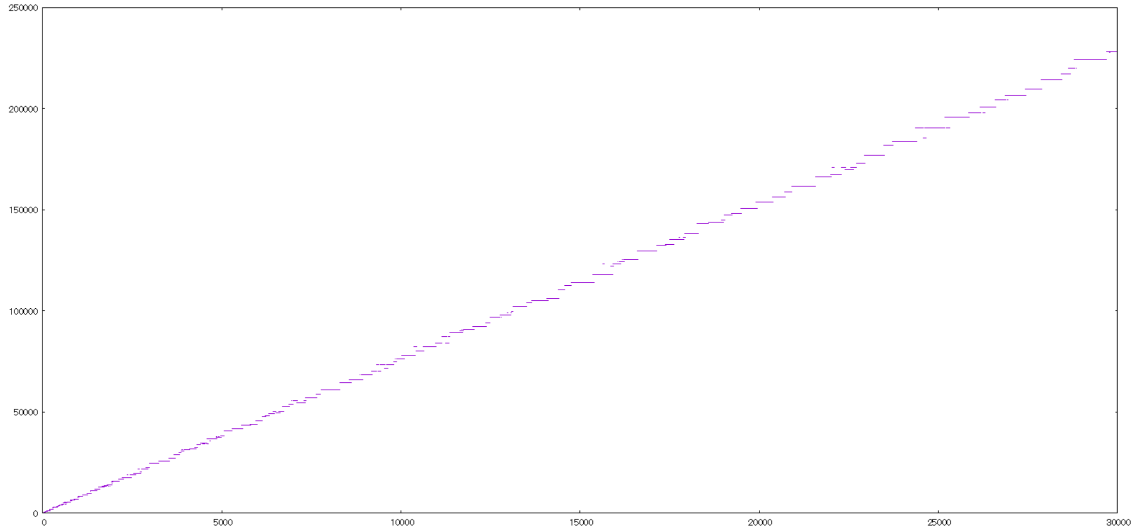

図 1　$C_h(2^n-1)$ のグラフ

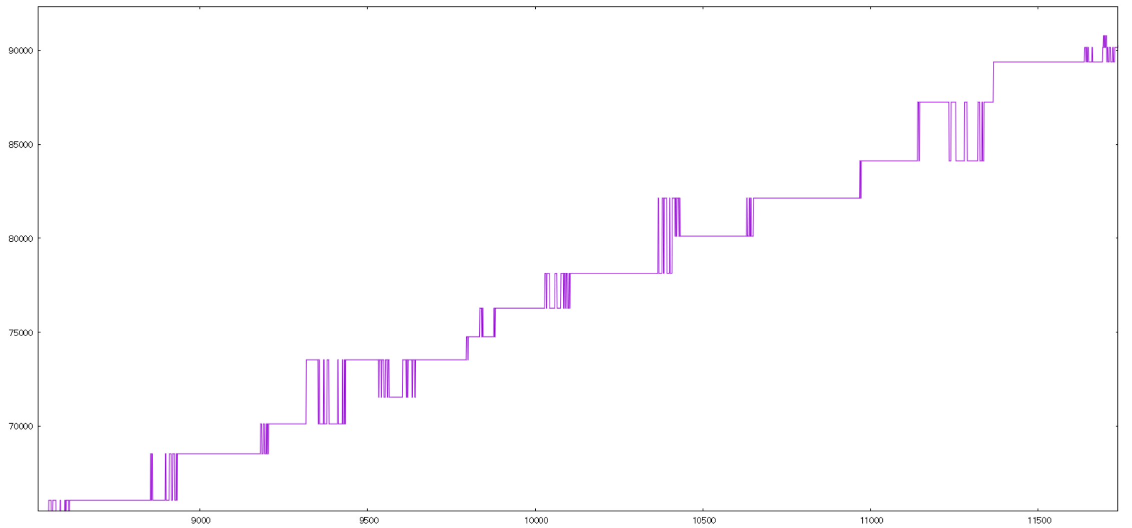

図 2　$C_h(2^n-1)$ のグラフの拡大図

非常に特徴的な形状をしていることがわかる。同じ値をとり続ける部分が多くみられ、さらに全体として 1 つの直線に沿っているように見える。同じ値をとり続けているのは本当に驚きで、長い区間だと例えば $7763 \le n \le 8284$ の間の n について $C_h(2^n-1)$ の値はすべて等しくなる。実に 522 個もの値が連続して等しくなっている。

では、直感的に予想できることをまとめてみよう。

予想 1. ある定数 α が存在して $n \to \infty$ において、$C_h(2^n-1)$ が αn で近似できるであろう。より厳密に書くと、ある定数 α が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_h(2^n-1)}{n} = \alpha$$

を満たすであろう。

予想 2. $C_h(2^n-1)$ が同じ値をとり続けるような、いくらでも長い区間が存在するだろう。つまり、

$$\forall M \in \mathbb{N},\ \exists n \text{ s.t. } 0 < i < M \Rightarrow C_h(2^n-1) = C_h(2^{n+i}-1)$$

が成立しているだろう。

予想 3. 3 以上の n において、$C_h(2^n-1)$ が同じ値をとり続けるような区間 (できるだけ長くなるようにとる) の長さは、全て偶数であろう。つまり、$2 < n < m$ のとき

$$\begin{aligned} C_h(2^{n-1}-1) &\neq C_h(2^n-1) \\ C_h(2^{m-1}-1) &\neq C_h(2^m-1) \\ n < i < m \Rightarrow C_h(2^i-1) &= C_h(2^n-1) \end{aligned}$$

が全て成り立っているなら、$m-n$ は偶数であろう。

予想 4. ほとんどすべての自然数は、$C_h(2^n-1)$ に出現しないだろう。つまり、$C_h(2^n-1)$ のとり得る値全ての集合を S_h とすると、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_h \cap \mathbb{N}_{\leq n}}{n} = 0$$

であろう。

これらの予想は非常に難しい問題に見える。どれもコラッツ予想の十分条件でも必要条件でもないようみ見えるからだ。しかし、予想 3 については、かなり簡単に示すことができた。

命題 3. 3 以上の n において、$C_h(2^n-1)$ が同じ値をとり続けるような区間 (できるだけ長くなるようにとる) の長さは、全て偶数である。

証明. まず、2 以上の自然数 n に対して、$C_h(2^{2n-1}-1) = C_h(2^{2n}-1)$ を示す。系 3 より、

$$\begin{aligned} g^{2n-1}\left(2^{2n-1}-1\right) =& 3^{2n-1}-1 \\ g^{2n}\left(2^{2n}-1\right) =& 3^{2n}-1 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、$2n-1$ 以下の非負整数 i に対する $g^i\left(2^{2n-1}-1\right)$ と、$2n$ 以下の非負整数 i に対する $g^i\left(2^{2n}-1\right)$ てすべて奇数だったので、g を h に置き換えても同様の議論ができる。直前の式の右辺がどちらも偶数であることに注意すると、

$$\begin{aligned} h^{2n-1}\left(2^{2n-1}-1\right) =& h\left(3^{2n-1}-1\right) \\ h^{2n}\left(2^{2n}-1\right) =& h\left(3^{2n}-1\right) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ。次に、上の式の $3^{2n-1}-1$ に注目すると、

$$\begin{aligned} 3^{2n-1}-1 \equiv& 3^{-1}+1 \\ \equiv& 2 \pmod 4 \end{aligned}$$

であるから、$3^{2n-1}-1$ は偶数であって 4 の倍数ではない。ゆえに、

$$h\left(3^{2n-1}-1\right)=\frac{3^{2n-1}-1}{2}$$

である。この数は奇数だから、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3^{2n-1}-1}{2}\right) =& \frac{1}{2}\left(3\frac{3^{2n-1}-1}{2}+1\right) \\ =& \frac{3^{2n}-1}{4} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$3^{2n}-1\equiv 9^n-1\equiv 1-1\equiv 0 \pmod 8$$

より、$3^{2n}-1$ は 8 の倍数である。ゆえに、

$$h\left(\frac{3^{2n-1}-1}{2}\right)=h\left(\frac{3^{2n}-1}{4}\right)$$

である。(2) に適用すると。

$$\begin{aligned} h^{2n}\left(2^{2n-1}-1\right) =& h^2\left(3^{2n-1}-1\right)=h\left(\frac{3^{2n}-1}{4}\right) \\ h^{2n}\left(2^{2n}-1\right) =& h\left(3^{2n}-1\right)=h\left(\frac{3^{2n}-1}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$h^{2n}\left(2^{2n-1}-1\right)=h^{2n}\left(2^{2n}-1\right)$$

が得られた。これが意味していることは、$2^{2n-1}-1,\ 2^{2n}-1$ から始まる h によるコラッツ数列は、$2n$ 項目以降では一致するということだ。また、2 以上の n において $C_h(2^n-1)>n$ であることは容易に示せるので、$2^{2n-1}-1,\ 2^{2n}-1$ から始まる h によるコラッツ数列は $2n$ 項以内に 1 になることはない。ゆえに、$2n$ 項目以降でコラッツ数列が一致してそれ以前には 1 にならないので、2 以上の n に対して

$$C_h\left(2^{2n-1}-1\right)=C_h\left(2^{2n}-1\right)$$

が示された。よって、3 以上の n で $C_h(2^n-1)$ の値が一致する区間の長さは必ず偶数になる。 ■

4 おわりに

コラッツ予想をステップ数から見ることによって、非常に面白い数列を発見することができた。わからない予想はまだまだあるので、発展させることができると思う。ひとつ残念だったのは、数列 $C_f(2^n-1)$ が OEIS に乗っていたことだった。`https://oeis.org/A193688` がその数列である。自分が初めて見つけたわけではなかったのでがっかりしたが、解決されたわけではないので、研究し甲斐があると思う。