フーリエ級数を使って $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ を証明したい!

数理科学研究会 BV22059 西山力也

2023 年 11 月 5 日

目次

0　はじめに

バーゼル問題というものをご存知だろうか．バーゼル問題とは，級数 (一言で言えば，一定の法則に従って変化する数を無限に並べた数列の和) の問題の 1 つで，平方数 (整数の 2 乗で表される数) の逆数全ての和はいくつになるかという問題である．レオンハルト・オイラーは，1735 年にこの問題を平方数に限らず，自然数の偶数乗の逆数の和について一般化した形式で解決した．平方数の逆数全ての和は次のようになる．

命題 0.1 (バーゼル問題)

平方数の逆数の和は $\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束する．すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

が成り立つ．

このバーゼル問題は高校数学で学ぶ知識だけを用いても証明はできるのだが，その証明方法は非常に特殊で理解しにくい．そこで今回は，大学数学で学ぶフーリエ級数展開を用いて簡潔に，かつ明快に証明していく．

前半では，微分法や積分法を学んだ高校生が理解しやすいように，高校数学で扱う内容やフーリエ級数の定義を紹介して実際に積分計算を行い，バーゼル問題を証明する．

また，後半では，大学生などの大学数学を学んでいる方向けに，フーリエ級数の各点収束性などの理論的な内容やリーマンのゼータ関数，円周率 π の値を求めるためのライプニッツの公式 (Leibniz formula) などを扱う．

以下，特に断りがなければ n や N は 1 以上の整数とし，$f(x), g(x)$ は実数 x を独立変数とする関数とする．

1　(高校生向け) バーゼル問題とフーリエ級数のための準備

1.1　バーゼル問題について

繰り返しになるが，バーゼル問題とは以下のような問題であった．

命題 0.1 (バーゼル問題)

平方数の逆数の和は $\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束する．すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

が成り立つ．

この式の不思議なところは平方数の逆数を無限回足し続けているのに，なぜか収束し，なぜか π が出てくるという点である．ちなみに，逆数の和の場合では，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$$

となり，無限大に発散してしまう．

1.2　高校数学で学ぶ公式や性質

今回扱うフーリエ級数には，三角関数と微分積分学の知識が必要である．そこで，高校数学で学ぶ公式や性質を紹介する．

命題 1.1 (初等関数の導関数)

n を 1 以上の整数とする．このとき，$(x^n)'=nx^{n-1}$ が成り立つ．

例 1. $(x)'=1$, $\left(x^2\right)'=2x$, $\left(x^3\right)'=3x^2$, $\left(x^4\right)'=4x^3$.

命題 1.2 (初等関数の不定積分)

n を 1 以上の整数，C を積分定数とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $\displaystyle\int \sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx+C$

(3) $\displaystyle\int \cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx+C$

例 2. $\displaystyle\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$, $\displaystyle\int 4x^3\,dx=x^4+C$.

定理 1.3

$f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で積分可能とする．このとき，次が成り立つ；

(1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ （k: 定数）

(2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ （複号同順）

閉区間 $[a, b]$ というのは，気持ちで言えば $y = f(x)$ の変数 x を $-a \leqq x \leqq b$ の範囲で考えるということである．また，開区間 (a, b) というのは，$y = f(x)$ の変数 x を $a < x < b$ の範囲で考えるということである．

定理 1.4 (微分積分学の基本定理)

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする．

(1) $\displaystyle S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ （$a < x < b$）とすると，次の式が成り立つ；

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

(2) $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．

注意． $F(b) - F(a)$ を $[F(x)]_a^b$ とかく．

今回は (2) をよく用いる．高校数学では，(2) は当たり前のこととして計算するが，本来であれば証明が必要だということに注意しなければならない．

定理 1.5 (部分積分法)

$f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能で $f'(x), g'(x)$ も連続ならば，

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

後に出てくるフーリエ係数を計算する上で，次の”奇関数”,”偶関数”は非常に重要となる．

定義 1.6 (奇関数と偶関数)

(1) 関数 $f(x)$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき，$f(x)$ は奇関数であるという．

(2) 関数 $g(x)$ が $g(-x) = g(x)$ を満たすとき，$g(x)$ は偶関数であるという．

例 3. (1) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \sin nx$ は奇関数である．

(2) $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = \cos nx$ は偶関数である．

命題 1.7

(1) $f(x)$ が奇関数，$g(x)$ が偶関数であれば，$h(x) \coloneqq f(x)g(x)$ は奇関数である．

(2) $f(x)$ が偶関数，$g(x)$ が偶関数であれば，$h(x) \coloneqq f(x)g(x)$ は偶関数である．

証明. (1) $f(x)$ が奇関数，$g(x)$ が偶関数とすると，

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= -f(x)g(x) \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

となるから，$h(x)$ は奇関数である．

(2) $f(x)$ が偶関数，$g(x)$ が偶関数とすると，

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= f(x)g(x) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

となるから，$h(x)$ は偶関数である．

□

例 4. $h_1(x) = x^2 \cos nx$ は偶関数，$h_2(x) = x^2 \sin nx$ は奇関数である．

命題 1.8 (奇関数，偶関数の定積分)

(1) 奇関数 $f(-x) = -f(x)$ のとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

(2) 偶関数 $f(-x) = f(x)$ のとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

この命題はどちらも良く使われるのだが，積分計算をする上で (1) は非常に便利である．被積分関数が奇関数であることさえ分かってしまえば，積分せずとも定積分の値が 0 になると瞬時に分かってしまうからである．

2　(高校生向け) フーリエ級数とバーゼル問題の証明

2.1　フーリエ級数の定義

関数 $f(x)$ を三角関数の級数として表したい．これが後に出てくる”フーリエ級数”と呼ばれるものだが，それを定義するために”区分的に連続”というものを定義する必要がある．それを以下の**定義 2.1** に記載する．

定義 2.1

I を有限区間とする．$f(x)$ は I 上の関数で有限個の点を除いて連続であり, 各不連続点 c_i と I の端点 a, b $(a < b)$ において極限値

$$\lim_{x\to c_i-0} f(x) =: f(c_i - 0),\ \lim_{x\to c_i+0} f(x) =: f(c_i + 0)$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) =: f(a + 0),\quad \lim_{x\to b-0} f(x) =: f(b - 0)$$

をもつとき，f は I において**区分的に連続**であるという．この関数のなす集合を $C_p(I)$ で表す．

この定義は，以下のような関数などを考えるということを意味している．

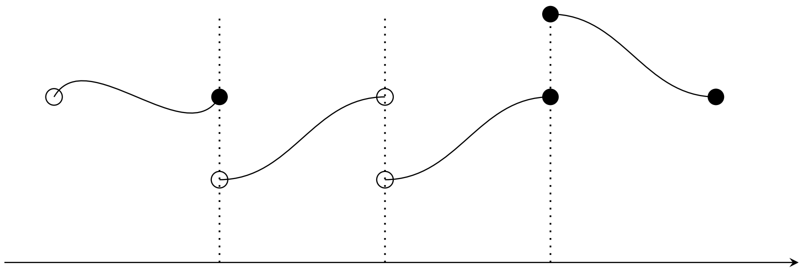


図 1　区分的に連続な関数のイメージ

定義 2.2

$f(x)$ と $f'(x)$ がともに区間 I において区分的に連続なとき，f は I で**区分的になめらか**という．

注意. $f(x)$ が実数上で定義された関数のとき，どんな有限区間 I においても区分的に連続ならば，f は実数上で区分的に連続という．また，$f(x)$ が実数上で定義された関数のとき，どんな有限区間 I においても区分的になめらかならば，f は実数上で区分的になめらかという．

今回扱う関数は，特に断りがなければ区分的になめらかであるとする．

定義 2.3

$f(x + 2\pi) = f(x)$ を満たすとき，$f(x)$ を周期 2π の関数という．

例 5. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ であるから，$f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ は周期 2π の関数である．

それでは，バーゼル問題を証明する鍵となるフーリエ級数を紹介する．

定義 2.4 (区分的に連続な閉区間 $[-\pi, \pi]$ でのフーリエ級数)

$f(x)$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された区分的に連続な関数とする．このとき，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ (n = 1, 2, \dots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \ (n = 1, 2, \dots)$$

を $f(x)$ の**フーリエ係数**という．
このとき，

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を $f(x)$ の**フーリエ級数**といい，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とかく．

そして，この $f(x)$ が特定の条件を満たせば $f(x)$ のフーリエ級数は $f(x)$ に一致することが知られている．

定理 2.5

$f(x)$ が区分的になめらかな連続な周期 2π の関数であれば $f(x)$ のフーリエ級数は各点 $x \in [-\pi, \pi]$ で収束して $f(x)$ に一致する．

2.2 バーゼル問題の証明

それでは，これまでの紹介してきた定義・定理・命題を用いてバーゼル問題を証明する．

命題 0.1 (バーゼル問題)

平方数の逆数の和は $\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束する．すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

が成り立つ．

証明. $f(x) = x^2 \ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ である周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を考える．

このとき，$f(x)$ は偶関数であるから，

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{3\pi}(\pi^3 - 0) \\
&= \frac{2}{3}\pi^2
\end{aligned}
$$

また，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cdot\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)'dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x^2)'\cdot\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi^2\sin n\pi - 0) - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)'dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\left(\left[x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x)'\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^n + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{(-1)^n\pi}{n} - \frac{1}{n^2}(\sin n\pi - 0)\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi}\cdot\left(-\frac{(-1)^n\pi}{n}\right) \\
&= (-1)^n\cdot\frac{4}{n^2} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx\,dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上から，

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} \cos nx \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \end{aligned}$$

また，$f(x)$ は区分的になめらかな連続な周期 2π の関数であるから，**定理 2.5** より，

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

が成り立つ．さらに，$x = \pi$ のとき $f(\pi) = \pi^2$ であるから，

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi \\ \frac{2}{3}\pi^2 &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n \\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2 n}{n^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

となるから，題意は示された． $\square$

3 (大学生向け) フーリエ級数の収束性

3.1 準備

複雑な説明を省くため，これまでは $f(x)$ のフーリエ級数は特定の条件を満たせば収束して $f(x)$ に一致するということ (**定理 2.5**) を認めた上でバーゼル問題を証明した．しかし，この**定理 2.5** は本来であれば証明すべきことである．そこで，この章でそれを証明する．

まずは，準備として収束性に必要な命題をいくつか紹介する．なお，大学生向けの内容なので，高校数学でも扱った定理の証明は省略する．

定理 3.1 (三角関数の加法定理)

(1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ (複号同順)

(2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ (複号同順)

例 6. $\sin\left(N + \dfrac{1}{2}\right)t = \sin\left(Nt + \dfrac{1}{2}t\right) = \sin Nt\cos\dfrac{1}{2}t + \cos Nt\sin\dfrac{1}{2}t$

この**定理 3.1** を用いることで，次の三角関数の積と和の公式が得られる．

定理 3.2 (三角関数の積と和の公式)

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\},\ \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

(2) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\},\ \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

定理 3.3 (ラグランジュの平均値の定理)

$f(x)$ は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．このとき，区間 (a, b) の中にある点 c が存在して，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a < c < b)$$

が成り立つ．

これを用いることで，次の**命題 3.4** を示すことができる．

命題 3.4

$f(x)$ は $[a, b]$ で区分的になめらかとする．このとき，

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c+0)}{h} = f'(c+0),\ c \in [a, b)$$

が成り立つ．

証明. $h > 0$ を十分小さくとり，関数 $F(x)$ を次のように定義する．

$$F(x) := \begin{cases} f(c+0) & (x = c) \\ f(x) & (c < x \leqq c+h) \end{cases}$$

このとき，$F(x)$ は $[c, c+h]$ で連続，$(c, c+h)$ で微分可能である．

$\delta \in (0,h)$ を固定し，$(c, c+h)$ において**定理 3.3(ラグランジュの平均値の定理)** を適用すると，
ある $\eta \in (c, c+\delta)$ が存在して，

$$\frac{f(c+\delta)-f(c+0)}{\delta} = \frac{F(c+\delta)-F(c)}{\delta} = F'(\eta) = f'(\eta)$$

が成り立つ．ここで，$\delta \to 0$ とすると，$\eta \to c+0$ であるから，

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(c+h)-f(c+0)}{h} = f'(c+0),\ c \in [a,b)$$

となり，題意は示された． □

定理 3.5

角の単位が弧度法のとき，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

が成り立つ．

例 7. $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

補題 3.6

$n, m \in \mathbb{N}$ とする．

(1) $\displaystyle \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$

(2) $\displaystyle \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m) \end{cases}$

証明. (1) **命題 1.7** より，$\sin nx$, $\cos nx \sin nx$ は奇関数である．よって，**命題 1.8** より，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

が得られる．

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\} dx \\
&= \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m) \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(n+m)x - \cos(n-m)x\} dx \\
&= \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m) \end{cases}
\end{aligned}$$

となるから，題意は示された．

□

補題 3.7

$f(t)$ を周期 2π の関数とする．このとき，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

が成り立つ．

証明. $t = s + 2\pi$ とすると，$f(s)$ は周期 2π の関数であるから，

$$\int_{\pi}^{\pi+a} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(s+2\pi)\,ds = \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(s)\,ds$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(t)\,dt &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{\pi+a} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

となるから，題意は示された． □

3.2 ベッセルの不等式とリーマン・ルベーグの補題

$f(x)$ のフーリエ級数の第 N 部分和

$$S_N(x) \coloneqq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を考える．

補題 3.8

$f \in C_p([-\pi, \pi])$ のとき，次が成り立つ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

証明. まず，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |f(x)|^2 - 2f(x)S_N(x) + |S_N(x)|^2 \right\} dx$$

である．右辺の第 2 項 $f(x)S_N(x)$ について，**定義 2.4** より，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0, \ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \pi a_n, \ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = \pi b_n$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right\}dx\\ &= \frac{a_0}{2}\cdot\pi a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cdot\pi a_n+b_n\cdot\pi b_n)\\ &= \pi\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right\}\end{aligned}$$

また，右辺の第 3 項 $|S_N(x)|^2$ について，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|S_N(x)|^2dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right\}^2dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{{a_0}^2}{4}+2\cdot\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\left(\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)^2\right\}dx\\ &= \frac{a_0^2}{4}\cdot 2\pi+\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right\}^2dx\\ &= \frac{\pi}{2}a_0^2+\int_{-\pi}^{\pi}\{(a_1\cos x+\cdots+a_N\cos Nx)+(b_1\sin x+\cdots+b_N\sin Nx)\}^2dx\\ &\quad (\heartsuit = a_1\cos x+\cdots+a_N\cos Nx,\ \spadesuit = b_1\sin x+\cdots+b_N\sin Nx \text{ とおく.})\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot a_0^2+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\heartsuit^2+2\heartsuit\spadesuit+\spadesuit^2\right)dx\end{aligned}$$

ここで，**補題 3.6** より，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\heartsuit^2dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_1^2\cos^2 x+\cdots+a_N^2\cos^2 Nx\right)dx\\ &= \left(a_1^2+\cdots+a_N^2\right)\pi\\ \int_{-\pi}^{\pi}\spadesuit^2dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(b_1^2\sin^2 x+\cdots+b_N^2\sin^2 Nx\right)dx\\ &= \left(b_1^2+\cdots+b_N^2\right)\pi\\ \int_{-\pi}^{\pi}\heartsuit\cdot\spadesuit dx &= 0\end{aligned}$$

であるから，

$$\int_{-\pi}^{\pi}|S_N(x)|^2dx = \pi\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right\}$$

となる．

まとめると，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(x)|^2dx &= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-2\pi\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right\}+\pi\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right\}\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)\end{aligned}$$

となるから，題意は示された． □

また，**補題 3.8** から，次が得られる．

定理 3.9 (ベッセルの不等式)

$f \in C_p([-\pi,\pi])$ のとき，次が成り立つ．

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

証明． **補題 3.8** より，

$$0 \leqq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

すなわち，

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

が成り立つ． □

注意． **定理 3.9** の証明で，

$$0 \leqq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

とわかるのは，**補題 3.8** の左辺が $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(x)|^2dx \geqq 0$ であることからわかる．

補題 3.10 (リーマン・ルベーグの補題)

$f \in C_p([-\pi,\pi])$ のとき，次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0$$

証明． $f(x)$ が区分的に連続であるとき，**定理 3.9** の右辺は有限の値を取るから，$n\to\infty$ とすると，その左辺

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

も有限の値を取る．すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<\infty$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}b_n=0$$

を得る．よって，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0$$

となるから，題意は示された． □

3.3 ディレクレ核とフーリエ級数の各点収束

以下，$f(x)$ を区分的になめらかな周期 2π の関数とする．$f(x)$ のフーリエ級数の第 N 部分和

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

に係数の定義式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos n\tau d\tau \quad (n = 0, 1\ldots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin n\tau d\tau \quad (n = 1, 2\ldots)$$

を代入すると，**定理 3.1(三角関数の加法定理)** から，

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos n\tau\cos nx d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin n\tau\sin nx d\tau\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\cos n\tau\cos nx + \sin n\tau\sin nx)\right\}d\tau\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos n(\tau - x)\right\}d\tau
\end{aligned}$$

となる．ここで，$\tau - x = t$ とすれば

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nt\right\}dt$$

と書ける．いま，$f(x)$ は周期 2π の関数なので，$f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nt\right)$ は t に関して周期 2π の関数である．

よって，**補題 3.7** から，

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nt\right)dt$$

を得る．このとき，$D_N(t) \coloneqq \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nt$ をディレクレ核という．

補題 3.11

ディィレクレ核 $D_N(t)$ について，以下が成り立つ.

(1) $D_N(t) = \dfrac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}} \quad (t \neq 0)$

(2) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)dt = 1$

証明. (1)

$$\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nt\right)\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t \tag{3.1}$$

が成り立つことを N に関する数学的帰納法で示す.

(i) $N=1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \left(\frac{1}{2}+\cos t\right)\sin\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}+\cos t\sin\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\left\{\sin\left(t+\frac{t}{2}\right)-\sin\left(t-\frac{t}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}t \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)t \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

となり，成り立つ.

(ii) $N=k \ \ (k\in\mathbb{N})$ のとき，(3.1) が成り立つと仮定すると，

$$\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos nt\right)\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t$$

(iii) $N=k+1$ のときを考えると，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos nt\right)\sin\frac{t}{2}+\cos(k+1)t\sin\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\left\{\sin\left(k+1+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k+1-\frac{1}{2}\right)t\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\sin\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t \\
&= \sin\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)t \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

であるから，$N=k+1$ のときにも (3.1) は成り立つ.

以上から，すべての自然数 N に対して，(3.1) は成り立つ．

(2) $D_N(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos nt$ は偶関数であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nt\right)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}t + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

となり，題意は示された．

□

これまでの内容を踏まえてフーリエ級数の収束性を証明する．ただし，**定理 2.5** の言い回しでは少し曖昧な表現を含むので，もう少し厳密な言い方に変えた**定理 3.12** を考える．

定理 3.12 (フーリエ級数の各点収束定理)

$f(x)$ が周期 2π の区分的になめらかな関数であれば，$f(x)$ のフーリエ級数は各点 $x \in [-\pi, \pi]$ で収束して

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$$

が成り立つ．さらに，$f(x)$ が連続であれば，

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$$

が成り立つ．

証明．補題 3.11(2) から，

$$\begin{aligned}
f(x+0) &= f(x+0)\cdot\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(t)dt \\
f(x-0) &= f(x-0)\cdot\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(t)dt
\end{aligned}$$

と表すことができるので，

$$\begin{aligned}
&S_N(x) - \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)D_N(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)D_N(t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\{f(x+t) - f(x+0)\}D_N(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\{f(x+t) - f(x-0)\}D_N(t)dt \\
&=: I_N(x)
\end{aligned}$$

を得る．また，**補題 3.11**(1) から，

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) tdt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) tdt$$

が成り立つ．ここで，

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}} & (0 < t \leqq \pi) \\ \dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{\sin\frac{t}{2}} & (-\pi \leqq t < 0) \end{cases}$$

とおく．f は区分的になめらかなので，**命題 3.4** より，$f'(x+0), f'(x-0)$ が存在し，$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} = 2$ であるから，

$$\lim_{t\to +0} g(t) = \lim_{t\to +0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \cdot \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} = 2f'(x+0)$$
$$\lim_{t\to -0} g(t) = \lim_{t\to -0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} \cdot \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} = 2f'(x-0)$$

となる．よって，$g \in C_p([\pi, \pi])$ である．また，**定理 3.1(三角関数の加法定理)** より，

$$\begin{aligned} I_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) tdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\sin Nt \cos\frac{1}{2}t + \cos Nt \sin\frac{1}{2}t\right) dt \end{aligned}$$

であるから，

$$g_1(t) = g(t)\cos\frac{1}{2}t,\ g_2(t) = g(t)\sin\frac{1}{2}t$$

とおけば，$g_1, g_2 \in C_p([-\pi, \pi])$ である．したがって，**補題 3.10(リーマン・ルベーグの補題)** から，

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(t) \sin Ntdt = 0$$
$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_2(t) \cos Ntdt = 0$$

となり，$|I_N(x)| \to 0 \ \ (N \to \infty)$，すなわち，

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{1}{2}\left\{f(x+0) + f(x-0)\right\}$$

を得る．

さらに，$f(x)$ が連続のとき，

$$\lim_{\tau\to x} f(\tau) = f(x)$$

すなわち，

$$f(x+0) = f(x-0) = f(x)$$

であるから，

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} S_N(x) &= \frac{1}{2}\left\{f(x) + f(x)\right\} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となり，題意は示された． □

4 (応用) リーマンのゼータ関数と円周率 π の近似

4.1 リーマンのゼータ関数の定義

今回は平方数の逆数の和について考えたが，自然数の累乗の逆数の和として一般化したものを考えることができる．

定義 4.1 (リーマンのゼータ関数)

s を複素数，n を 1 以上の整数とするとき，

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

をリーマンのゼータ関数という．

例 8. ゼータ関数の例をいくつか紹介する．

$$\begin{aligned}
\zeta(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty \\
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \\
\zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945} \\
\zeta(8) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \cdots = \frac{\pi^8}{9450}
\end{aligned}$$

今回の「バーゼル問題」は，ゼータ関数 $\zeta(s)$ の $s = 2$ における値 $\zeta(2)$ を求める問題と言い換えることもできる．

バーゼル問題の証明の際に，$f(x) = x^2$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ である周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を考え，

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

という結果が得られた．バーゼル問題の証明の際には $x = \pi$ のときを考えたが，$x = 0$ とすると，$f(0) = 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\
-4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \frac{\pi^2}{3} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \\
1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots &= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

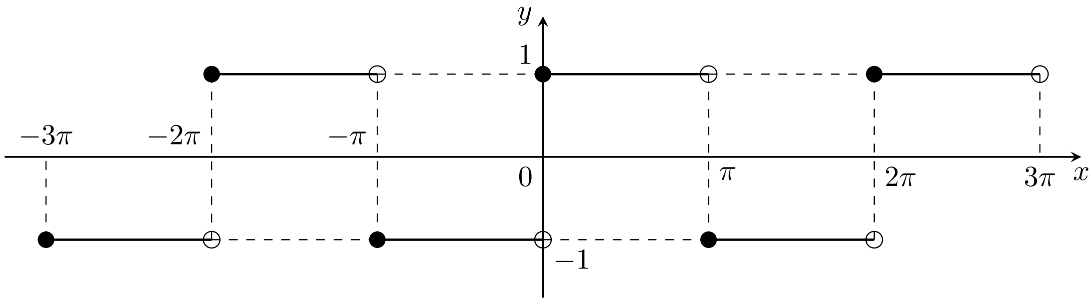
ということもわかる．

4.2　円周率 π の近似とライプニッツの公式 (Leibniz formula)

最後に，

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x \leqq \pi) \\ -1 & (-\pi \leqq x < 0) \end{cases}$$

である周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を考える．$y = f(x)$ として，この関数をグラフに表すと，次のようになる．



このとき，$f(x)$ は区分的になめらかな奇関数であるから，

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

また，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \end{aligned}$$

である．

　以上から，

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \right\} \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & (n : \text{偶数}) \\ \dfrac{2}{n} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

より，級数は $n = 2k - 1$ (k は 1 以上の整数) のときのみ残り，

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{2k-1}\sin(2k-1)x\right\} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}
\end{aligned}
$$

また，$f(x)$ は区分的になめらかな連続な周期 2π の関数であるから，**定理 2.5** より，

$$
f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}
$$

が成り立つ．さらに，$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ であるから，

$$
\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots
$$

を得る．これはライプニッツの公式 (Leibniz formula) と呼ばれ，これにより円周率の値を求めることができる．

注意． このライプニッツの公式は単純な形をしているが，実際の円周率の計算に用いるには収束が非常に遅いために全く適していない．10 進法での正確な値 ($= 3.1415926535\ldots$) を 10 桁分計算するだけで 100 億回以上の計算を要するほどである．ちなみに，最初の 500 万項の部分和を計算すると π の近似値として，

$$
3.141592\underline{4}5358979323846\underline{4}6433832795027\underline{7}841971693993\underline{873}058\ldots
$$

が得られる．下線の引かれている桁だけ間違っているが，全体で見れば 10 進法での正確な値にかなり近づいていることがわかる．

5　おわりに

今回はバーゼル問題をフーリエ級数を用いて証明した．このフーリエ級数を用いることで，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

などという不思議な等式をたくさん得られる．

一方，少し不思議に感じる箇所があった．それは，最後に取り上げたリーマンのゼータ関数について，$s = 0$ とすると，$\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ となる点である．なぜ不思議に思ったのかというと，

$$\frac{1}{n^0} = \frac{1}{1} = 1$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

となり，正の無限大に発散してしまうのではないか？と思ったからである．

色々と調べていくと，「リーマンのゼータ関数の解析接続」というものを考えればよいことがわかった．そこで，リーマンのゼータ関数の解析接続を理解することを今後の課題としたい．

参考文献

[1] 倉田和浩．フーリエ解析の基礎と応用．数理工学社，2020-07-10．

[2] 洲之内源一郎．フーリエ解析とその応用．サイエンス社，2017-07-10．

[3] 矢崎成俊．弱点克服 大学生のフーリエ解析．東京図書，2022-05-25．

[4] 佐藤敏明．文系編集者がわかるまで書き直した沁みる「フーリエ級数・フーリエ変換」．JMAM，2022-01-30．

[5] チャート研究所．改訂版 チャート式 基礎からの数学 II+B．数研出版，2019-11-01．

[6] チャート研究所．改訂版 チャート式 基礎からの数学 III．数研出版，2020-01-10．

[7] ”バーゼル問題”．ウィキペディア．2023-06-04．https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%90%E3%83%BC%E3%82%BC%E3%83%AB%E5%95%8F%E9%A1%8C，(参照 2023-10-31)．

[8] ”リーマンゼータ関数”．ウィキペディア．2023-08-16．https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AA%E3%83%BC%E3%83%9E%E3%83%B3%E3%82%BC%E3%83%BC%E3%82%BF%E9%96%A2%E6%95%B0，(参照 2023-10-31)．

[9] ”平方数の逆数の和”．ゲイシャインターネット．https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/electro/fourie1.htm#gsc.tab=0，(参照 2023-10-30)．

[10] ”バーゼル問題の初等的な証明”．高校数学の美しい物語．2021-03-07．https://manabitimes.jp/math/878，(参照 2023-10-29)．

[11] ”$1+1+1+\cdots$”．ウィキペディア．2023-02-28．https://ja.wikipedia.org/wiki/1%2B1%2B1%2B%E2%80%A6，(参照 2023-10-31)．

[12] ”ライプニッツの公式”．ウィキペディア．2023-03-23．https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A9%E3%82%A4%E3%83%97%E3%83%8B%E3%83%83%E3%83%84%E3%81%AE%E5%85%AC%E5%BC%8F，(参照 2023-11-02)．