芝浦祭研究発表

白須一至

2023/11/3

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

が成り立つことを中学生でも分かるように説明しよう!!

1　初めに

まず、この問題は **バーゼル問題** と言われるものである。ヤコブ・ベルヌーイやレオンハルト・オイラーなどのバーゼル出身の数学者がこの問題を取り組んだことから名前が付けられた 91 年未解決の問題であった。(1644 年問題提起)

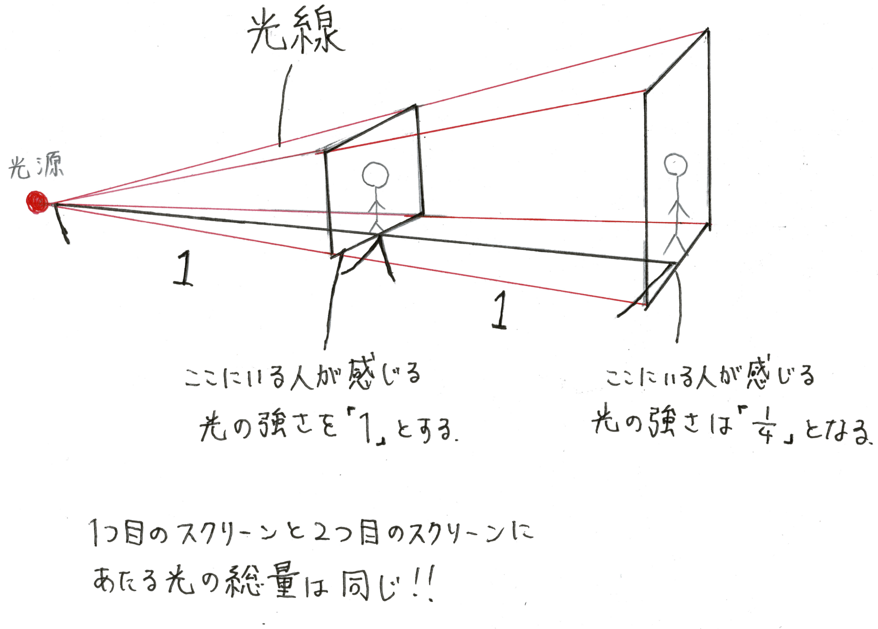
2　選んだ理由

なぜ今回この問題を選んだかというとこの問題は 91 年という長い間解かれなかったのにもかかわらず、中学数学だけで証明ができてしまう。そこに関心を持ち、自分で色々と調べてきたことを皆さんに伝えたい。

3　解法

3.1　光とは？

まず「光」について話から始める。

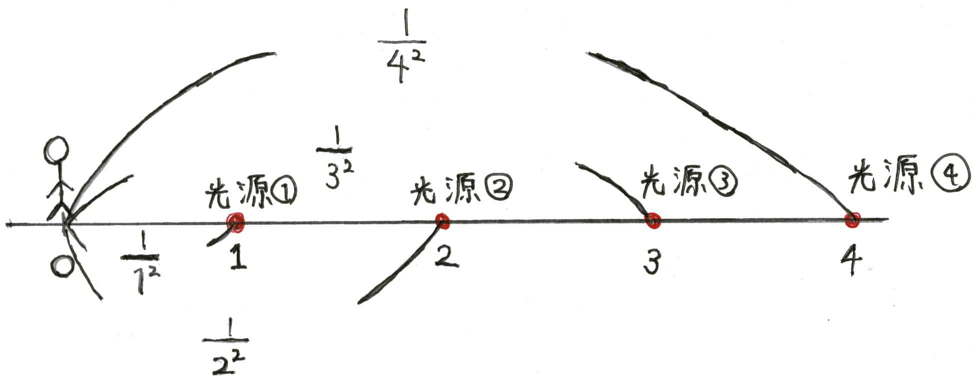


相似の関係より、２人目のスクリーンの面積は１人目のスクリーンの面積の **４倍** となっている。しかし、光の総量は同じなので「光の強さ」は **1/4** 倍になっている。

一般に、「光の強さ」は光源から距離の２乗に **反比例** する！！

この考えを用いると...

$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots$ が表しているのは以下の図のようになる。

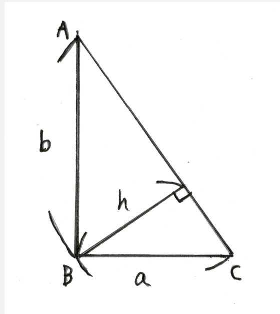


3.2　逆三平方の定理

逆三平方の定理

直角三角形 ABC に対して、$AB = b$、$BC = c$、B から対辺 AC におろした垂線の長さを h とすると、

$$\boldsymbol{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

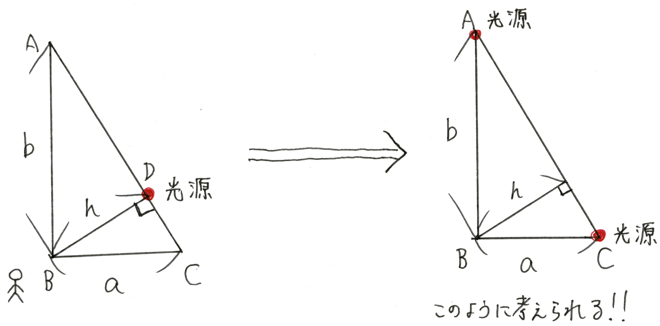


Proof.　直角三角形 ABC の面積について考える。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}h \iff ab &= \sqrt{a^2+b^2}h \\ \iff a^2b^2 &= (a^2+b^2)h^2 \\ \iff \frac{1}{h} &= \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \\ \iff \frac{1}{h^2} &= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\end{aligned}$$

□

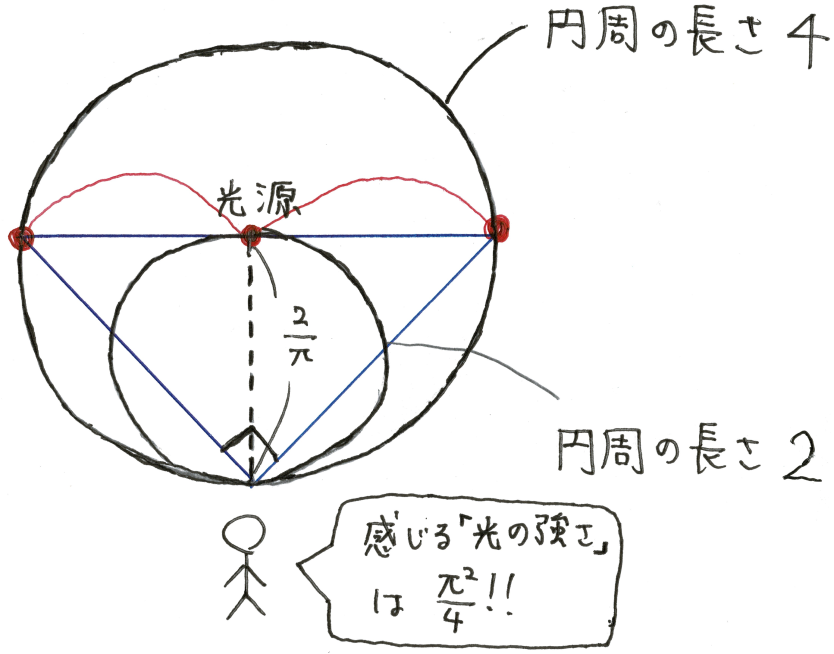
先ほどの光の考えを逆三平方の定理を用いて考えると...



人が感じる光の強さは光源の距離の 2 乗に反比例するので $\frac{1}{h^2}$ であり、また逆三平方の定理より、いま点 D にある光源を A と C にあると考えることができる。(光源が移動できる！！)

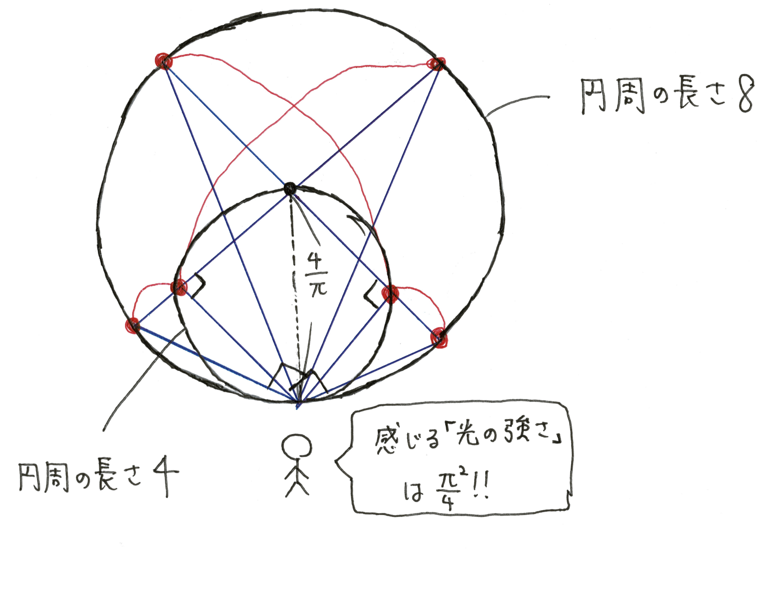
この操作を無限に考えていく。

3.3　円について



さきほどの逆三平方の定理より図のようになる光源を 2 つに分けることができた！！

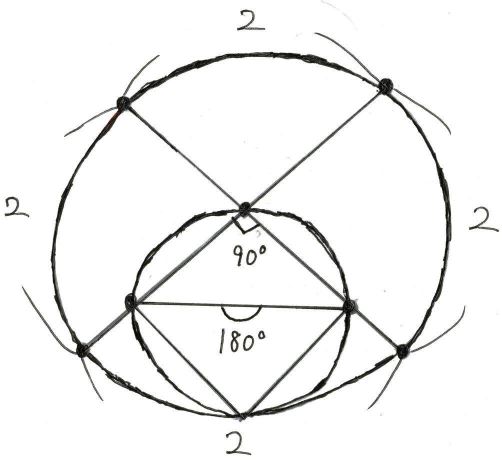
もう一つサイズを大きくした円について考えてみる。



上図はまず、観測者からの光源に対して線分 CD を結ぶ。線分 CD に対して、点 D を通るような線分 AB を考える。

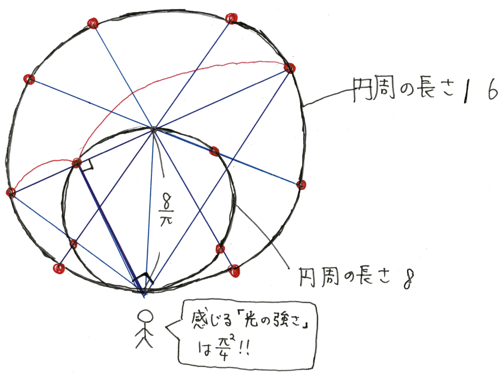
今、$\angle CDE = 90^\circ$ なので、線分 CE は小さい方の円の直径となっていることが分かる。つまり点 E は大きい円の中心ということから、線分 AB は大きい円の直径である。従って、$\angle ACB = 90^\circ$ となる。

ここで、逆三平方の定理を使うと上図のように光源を分けることができる。

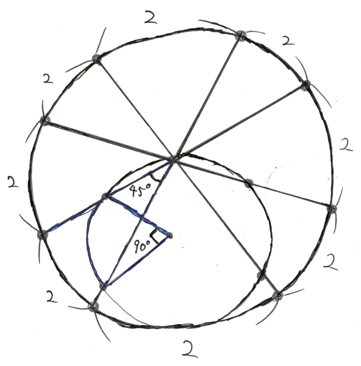


上図のように 4 点に分かれた光源は大きい方の円を 4 等分していることが分かる。また、円の半径が 2 倍、中心角 1/2 倍になったので図のようなことが言える。

もう一つサイズを大きくして、同じように考えると・・・

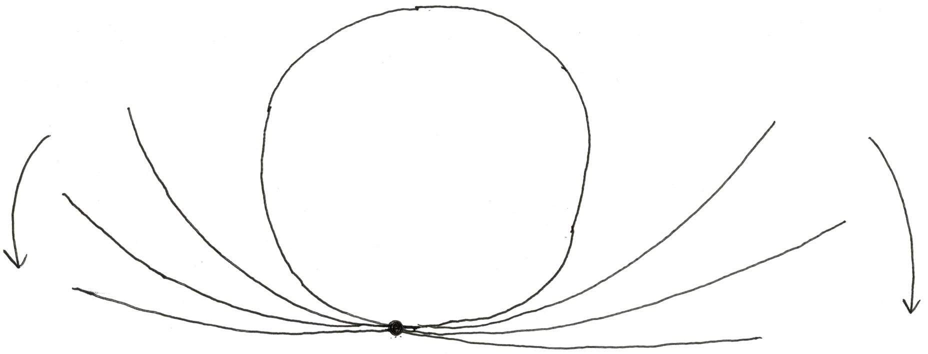


図のように小さい円の中心角は 4 点が等分する点なので 90° である。また、その孤と同じ円周角は 1/2 倍されるので 45° となる。

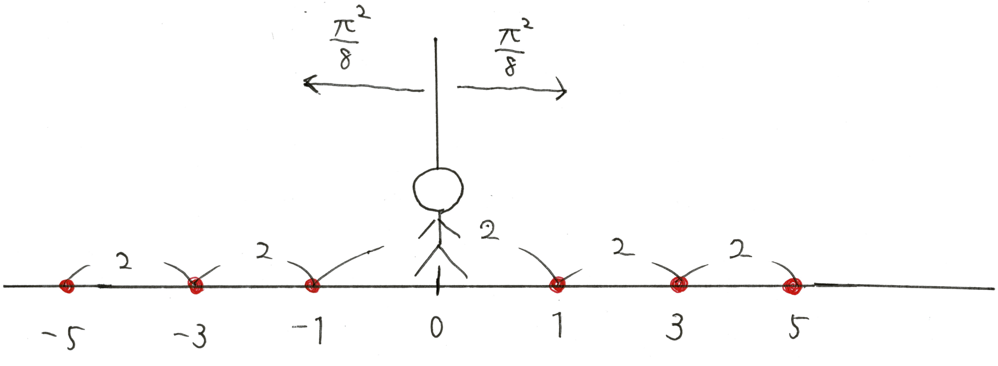


他の点についても同じことを考えると、大きい方の円における 8 個の点は円周を等分していることが分かる。

以上のことを無限に行うと...



円を無限に大きくすると直線に近づく!!



光の強さは元の $\dfrac{\pi^2}{4}$ で変わらない。

また、左右の対照性より左で $\dfrac{\pi^2}{8}$、右で $\dfrac{\pi^2}{8}$ の光の強さを感じる。

よって、

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots \tag{1}$$

ここで、示す等式の左辺を

$$S = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots \tag{2}$$

とおく。(1) − (2) より

$$S-\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$$

を得る。すなわち、

$$S-\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

(1) より、

$$S-\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}S \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{S = \frac{\pi^2}{6}}$$

3.4 まとめ

バーゼル問題

$$\boldsymbol{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}}$$

4 最後に

数学はとても面白いものだと思う。今回のバーゼル問題のように二乗の逆数を無限に足し合わせると $\frac{\pi^2}{6}$ というあまりにも考え難い値に収束する。しかし、こんな信じ難い事でもしっかりと論理的に導いていける。ここが数学の面白さであり、魅力だと思う。今後も色々面白いテーマがあるので調べていきたい。今回はご清聴ありがとうございました。