

魔法陣から学ぶ数学

システム工学部 数理科学科
BV20061 高木 洋平

2023年11月2日

目次

1	はじめに	2
2	魔法陣とその作り方	2
2.1	魔法陣について	2
2.2	ラテン方陣とオイラー方陣	2
3	有限アフィン幾何	5
3.1	アフィン平面の公理	5
3.2	同値関係とは	6
3.3	いくつかの定理	6
3.4	有限アフィン平面	9
4	体とアフィン平面	11
4.1	有限平面 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	11
4.2	有限平面 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	12
4.3	有限平面 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4?$	14
4.4	有限平面 $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4$	14
5	アフィン平面と魔法陣	16
6	射影幾何学	19
6.1	射影平面	20
6.2	射影平面とアフィン平面	20
6.3	射影平面の双対性	21
6.4	デザルグの定理	22

1 はじめに

魔法陣というゲームで遊んだことがある人がいると思います. そうでなくても聞いたことある人がほとんどだと思います. ここでは, その魔法陣から簡単に数学理論に触れていくことを目標としています.

2 魔法陣とその作り方

2.1 魔法陣について

まずは魔法陣とは何かを説明する.

6	7	2
8	3	4
1	5	9

上にある 3×3 の表を見ると, 1 から 9 までの数が一切被らずに並んでいる. そして任意の縦, 横の並びについて, その要素の和が一定の値になることがわかる. 実際, 横の要素の和は

$$6 + 7 + 2 = 15, 8 + 3 + 4 = 15, 1 + 5 + 9 = 15$$

縦の要素の和は

$$6 + 8 + 1 = 15, 7 + 3 + 5 = 15, 2 + 4 + 9 = 15$$

となる. このように縦の列の和, 横の列の和がともに等しくなるような $n \times n$ の正方形の表を「魔法陣」と定義する. 魔法陣の作り方は百人十色だが, ここではラテン方陣とオイラー方陣を用いた作り方を考えていく.

2.2 ラテン方陣とオイラー方陣

表 1: ラテン方陣 1(n=3)

1	2	3
3	1	2
2	3	1

表 2: ラテン方陣 $2(n=3)$

1	2	3
2	3	1
3	1	2

上にある2つの表が3次ラテン方陣になる. これらの特徴は, どの縦, 横の列をとっても同じ数字が一回しか出現しないところにある. このように $1, \dots, n$ までを, 任意の縦, 横の列に対して重複しないように配置した $n \times n$ の表を $n \times n$ のラテン方陣と定義する. そして

表 3: オイラー方陣 ($n=3$)

(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)
(3, 2)	(1, 3)	(2, 1)
(2, 3)	(3, 1)	(1, 2)

オイラー方陣は上表のように, 表 1, 2 の対応するマスの要素の組を並べたものになる. このようにオイラー方陣を手に入れば, ここから容易く魔法陣を作ることが出来る. まずオイラー方陣にある全ての数字から 1 を引く. すると下の表を得る.

表 4: オイラー方陣 ($n=3$)

(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)
(2, 1)	(0, 2)	(1, 0)
(1, 2)	(2, 0)	(0, 1)

そして n を法として, $(a, b) = a \times n^1 + b \times n^0 \pmod{n}$ という計算をする. 今回は $n = 3$ なので, 計算を施すと以下のような計算結果になる.

表 5: オイラー方陣 ($n=3$)

0	4	8
7	2	3
5	6	1

最後にオイラー方陣にある全ての数字から 1 を足すと, やっと表 6 のような魔法陣を得ることが出来る.

表 6: オイラー方陣 ($n=3$)

1	5	9
8	3	4
6	7	2

なぜこれで魔法陣ができるのか理由を考えると、それはラテン方陣のおかげであることが分かる。ラテン方陣はどの縦、横の列を見ても数字が重複することはなかった。その性質がうまくオイラー方陣にも受け継がれている。なので $1, \dots, n$ を重複なく並べることが出来る。またで表 3 のオイラー方陣の各縦、横の列の和を考えると、どれも $(4, 4)$ となる。一般の $n \times n$ オイラー方陣に対しても各縦、横の和は $(n(n-1)/2, n(n-1)/2)$ になる。

ここまでの話を整理すると、魔法陣を作るためには異なるラテン方陣 2 つを用意し、そこからオイラー方陣を手に入れる必要がある。このとき、オイラー方陣には、マス目の数の組が重複しないこと、各縦、横の和が一定になるという、良い性質を持っている必要があった。実は n が奇数のとき、このアルゴリズムで魔法陣を作ることが示せる。しかし反対に n が偶数のときは、この方法が破綻する。具体的にはオイラー方陣にて、マス目の数の組が重複しないことという条件が満たされなくなってしまう (表 7, 8, 9 を参照)。この先では、すべての n に対して、 n 次の魔法陣は存在するのか、またどんな n に対して魔法陣が存在するのかということを考えていく。

表 7: ラテン方陣 1 ($n=4$)

0	1	2	3
3	0	1	2
2	3	0	1
1	2	3	0

表 8: ラテン方陣 2 ($n=4$)

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

表 9: オイラー方陣 (n=4)

(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)
(3, 1)	(0, 2)	(1, 3)	(2, 0)
(2, 2)	(3, 3)	(0, 0)	(1, 1)
(1, 3)	(2, 0)	(3, 1)	(0, 2)

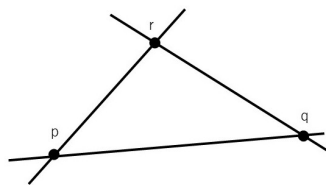
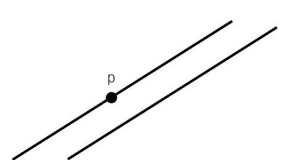
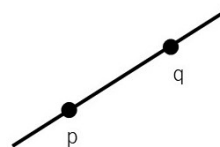
3 有限アフィン幾何

本来アフィン平面はアフィン幾何を通して定義するのが主流なのだが, 今回は議論の簡単のために Harshorne の公理にしたがって話を進めていく. アフィン平面の話をした後は, 有限アフィン平面について幾つか定理を導いていく.

3.1 アフィン平面の公理

アフィン平面の公理

- 公理 A1
異なる2つの点 p, q に対して,
 p と q を通る直線がただ1つ存在する.
- 公理 A2
与えられた直線 l と l 上にはない点 p に対して,
 p を通り l と平行な直線がただ1つ存在する.
- 公理 A3
1本の直線に含まれない3点が存在する.



3.2 同値関係とは

まず先に, 同値関係を導入する.

同値関係

集合 X 上の関係 \sim が以下の条件を満たすときに, 関係 \sim を同値関係という.

- $a \sim a$ (反射律)
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (対称律)
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (推移律)

\sim を集合 X 上の同値関係としたとき, $a \in X$ に対して, $C(a) = \{x \in X \mid x \sim a\}$ を a の同値類という. そして \sim を集合 X 上の同値関係としたとき, 以下のことが知られている.

- $\forall a \in X, a \in C(a)$
- $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset \Rightarrow C(a) = C(b), (a, b \in X)$

ここでは省略するが, m と n が平行であることを $m \parallel n$ と表したとき, \parallel は同値関係になることが知られている.

3.3 いくつかの定理

定理 3.3.1

異なる 2 直線は, 交わらないか, 1 点で交わるかのどちらかである.

[証明]

公理 A1 より, ある 2 点を通る直線はただ 1 つ定まるので, 異なる直線が 2 点以上で交われば, それは同じ直線であることが分かる.

[証明終]

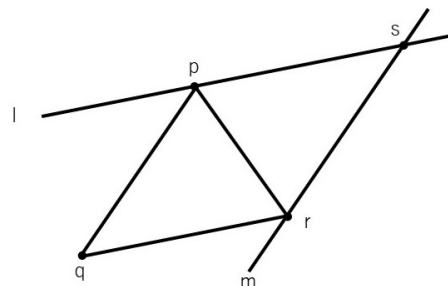
定理 3.3.2

アフィン平面にはある 4 点が存在して, 任意の 3 点について 1 直線上に存在しない.

[証明] 公理 A3 より, 1 直線上にない 3 点が存在しており, それぞれを p, q, r とおく. このとき公理 A2 より, p を通って qr に平行な直線が唯一存在するので, その直線を l とおく. 同様に r を通って pq に平行な直線を m とおく. 直線 l, m は平行ではないので $(pq \neq qr, pq \in C(m), qr \in C(l))$, 定理 3.3.1 より, 直線 l と m の交点を s とする. 以下, $(p, q, r), (a, p, q), (s, q, r), (a, p, r)$ の組がどれも 1 直線上にないことを示す. まず (p, q, r) は自明です.

次に, (s, p, q) が一直線上にあると仮定した場合, l は qr と q で交わることになり, l が qr と平行であることと矛盾する. (a, q, r) についてもまったく同様の議論を行う.

最後に, (s, p, r) が一直線上にあると仮定した場合, l と m が 2 点を共有することになるので, 平行の関係になる. このとき, 同値関係より pq, qr が平行になりますが, 点 q を共有しているため矛盾が生じた.



[証明終]

定理 3.3.3

任意の点について, その点を通る直線は 2 本以上存在する.

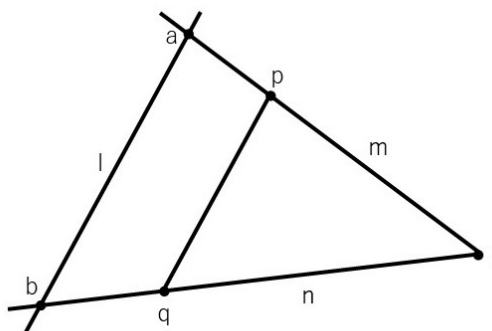
[証明] 定理 3.3.2 より, ある点 p, q, r, s をおき, そこに任意の点 a を与える. a が他の点と同じ場合は自明になる. 以下, a は他の点と異なるとする. a を通る直線が唯一つしかないとすると, 直線 ap, aq, ar は同一の直線になるが, 定理 3.3.2 より, 一直線上にないため矛盾となる.

[証明終]

定理 3.3.4

どの直線も少なくとも 2 点を含む.

[証明] 最初に任意の直線 l を与える. 定理 3.3.2 より, ある点 p, q, r, s をおき, l が少なくとも 3 点を含まないとする. l が p, q, r を含まないと仮定したとき, p, q, r が 1 直線上にないことから, pq, qr, rp のいずれも平行ではないことが分かる. したがって, l と平行な直線は多くても 1 本だけになる. l と平行でない直線を m, n とおき, l との交点をそれぞれ a, b とおく. もし $a = b$ ならば, m と n は異なる 2 点を共有することになり, m と n が平行であることになる. これは不合理なので, 直線 l は異なる 2 点 a, b を含んでいる. 同様の議論を行えば, 直線 l は少なくとも 2 点を含むことが分かる. 直線 l は任意なので, どの直線も少なくとも 2 点を含むことが示すことができた.



[証明終]

定理 3.3.5

1つのアフィン平面上において、任意の直線は同じ個数の点を含む。

[証明]

まず直線 $l, m (l \neq m)$ を考える。

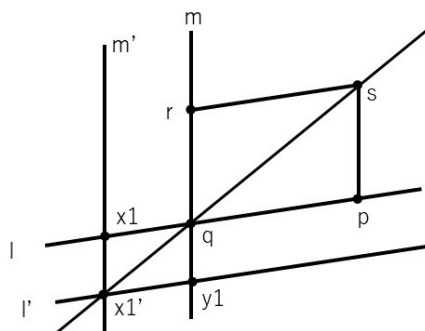
- l と m が平行でない場合

まず l, m の交点を q とおく。定理 3.3.4 より、 l, m 上に q 以外の点が存在するので、それぞれ p, r とする。そして定理 3.3.2 より、任意の 3 点が 1 直線上にないような 4 点 (p, q, r, s) を得ることができる。

ここで直線 l 上の q と異なる点 x_1 を考える。 x_1 を通り qr に平行な直線 m' を考えると、 qs と qr は平行ではないので、 m' と qs も平行ではないことが分かる。ここで m' と qs の交点を x'_1 とおく。次に、 x'_1 を通って l に平行な直線 l' は m と平行でないので、交点を持つことが分かる。その点を y_1 とおく。

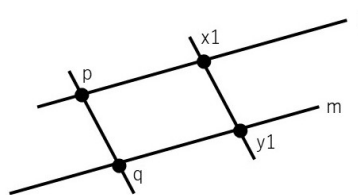
更に l 上の点 $x_2, (x_1 \neq x_2)$ をとると、これまでと同様な議論で x'_2, y_2 が得られる。平行な直線は交わらないので、 $x'_1 \neq x'_2, y_1 \neq y_2$ が示せる。

以上のことから、直線 m は直線 l より点の数は少なくないことが分かった。これを m と l を入れ替えて議論すれば、反対に直線 l は直線 m より点の数が少なくないことが分かる。よって、 l と m は同じ個数の点を含む。



- l と m が平行の場合

直線 m, l 上にそれぞれ点 p, q をとる。このとき、 pq は l, m と平行ではない。ここで l 上の点 $x_1, (x_1 \neq p)$ をとる。 x_1 を通り pq と平行な直線と直線 m の交点を y_1 とおく。そして l と m が平行でない場合と同じ証明を行う。



最初においた直線 $l, m (l \neq m)$ は任意なので、任意の直線は同じ個数の点を含むことが示せた。

[証明終]

3.4 有限アフィン平面

ここまではアフィン平面上の点が無限個でも有限個でも成り立つ. 以下の議論は有限個で成り立つ場合のみを取り扱う.

定義 3.4.1

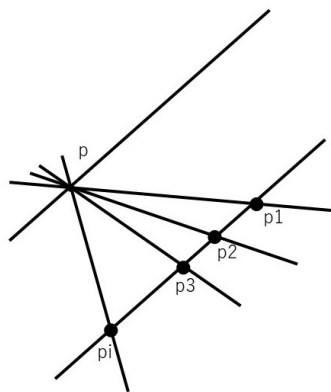
1本の直線に n 個の点があるようなアフィン平面を n 次元アフィン平面と呼ぶ.

定理 3.4.1

n 次のアフィン平面上では, 1点を通る直線が $(n + 1)$ 本存在する.

[証明]

最初に任意の点 p をとる. さらに点 q , ($p \neq q$) をとる. すべての点が直線 pq 上にあれば, アフィン平面の公理 A3 に反するので, pq 上にない点 r が存在することが分かる. ここで r を通って, pq に平行な直線を l とする. その l 上には家庭から n 個の点がある. それらを p_i , ($i = 1, \dots, n$) とおく. このとき点 p を通る直線は pq, pp_i , ($i = 1, \dots, n$) の $(n + 1)$ 本であることが分かった.



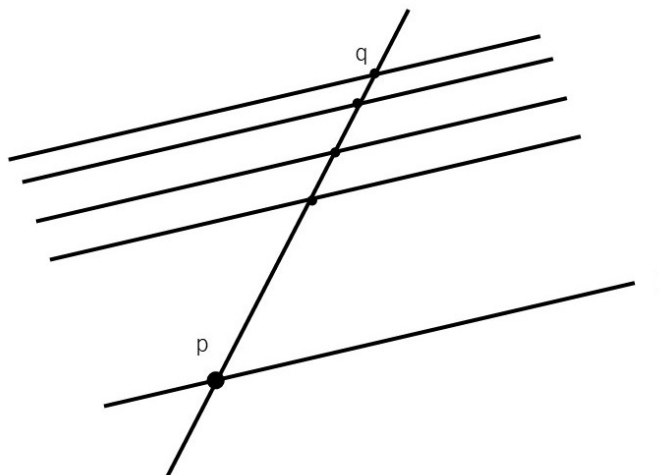
[証明終]

定理 3.4.2

n 次のアフィン平面上では, 平行な直線が n 本存在する.

[証明]

直線 l が与えられたとする. l 上の点 p と, l 上にない点 q をとってくる. すると定理 3.4.1 から直線 pq 上には p, q を除いて $(n - 2)$ 個の点がある. それぞれの点を通る平行な直線を引くと, 直線 l と平行な直線が $(n - 1)$ 本あることが分かる. よって平行な直線は n 本ある.



[証明終]

定理 3.4.3

n 次のアフィン平面上には、ちょうど n^2 個の点が存在する。

[証明]

定理 3.4.1 より、点 p を通る直線は $(n + 1)$ 本ある。またそれぞれの直線に対して、点 p を除いて $(n - 1)$ 本の点を含んでいる (このときそれらの点は一致しないことに注意)。したがって点の個数は、

$$1 + (n + 1)(n - 1) = n^2$$

となる。

[証明終]

定理 3.4.4

n 次のアフィン平面上には、 $n(n + 1)$ 本の直線が存在する。 [証明]

定理 3.4.1 と 3.4.3 より、各点を通る直線は $(n + 1)$ 本で平面上には n^2 個の点があるから、重複度を考慮して計算すると、

$$\frac{n^2(n+1)}{n} = n(n+1)$$

を得る。

[証明終]

定理 3.4.5

n 次のアフィン平面上について、平行な直線同士を集めた組が $(n + 1)$ 組ある。

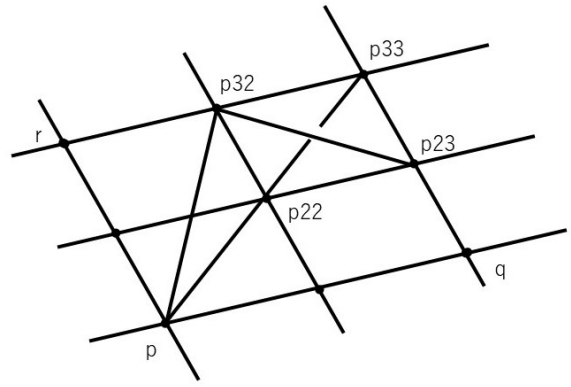
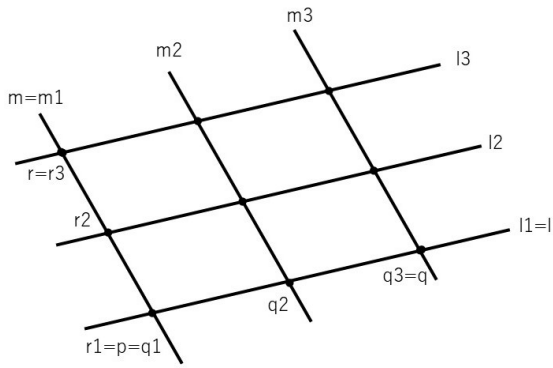
[証明] 定理 3.4.3 と 3.4.4 より、アフィン平面上には直線が全部で $n(n + 1)$ 本であり、平行な直線が n 本存在する。よって平行な直線同士を集めた組は $(n + 1)$ 組である。

[証明終]

3 次アフィン平面の例

1 直線上にない点 p, q, r を考える。直線 $pq = l, pr = m$ は平行ではありません。直線 l, m 上には 3 つの点が存在するので、それぞれ $q_1 = p, p_2, p_3 = q; r_1 = p, r_2, r_3 = r$ とおく。公理 A2 より、 q_2, q_3 を通って m に平行な直線が存在するので、それらを m_2, m_3 とおく。同様に r_2, r_3 を通って l に平行な直線が存在するので、それらを l_2, l_3 とおく。このとき $l_i \parallel m_j, (i = 1, 2, 3), (j = 1, 2, 3)$ である。このことからそれぞれの交点を $p_{(i,j)}, (i = 1, 2, 3), (j = 1, 2, 3)$ とする。交点が 9 個なので、定理 3.4.3 より、全ての点を得られた。

ここで、例えば点 p を通る直線を考えてみる。定理 3.4.1 より、1 点を通る直線は $3 + 1$ 本あることが分かる。ここでは、 $pq, pr, p_{22}p_{33}, p_{32}, p_{23}$ が挙げられる。



4 体とアフィン平面

\mathbb{R}_2 平面では, $y = ax + b$ と $x = c$ は平行でない限り交点を持ち, また異なる 2 直線 $y = ax + b$ と $y = a'x + b'$ ($b \neq b'$) は傾きが異なる限り交点を持つことは容易にわかる. そして, \mathbb{R}_2 平面がアフィン平面の公理を満たしていることもすぐにわかる. このことから, さきほど考えていた直線を一次方程式で表すことができるようになった.

ここから先は, 有限アフィン空間上の直線も一次方程式で表せるのかを考える.

4.1 有限平面 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

\mathbb{Z} を 2 を法として同値類に分けると, 以下のような集合がでてくる.

$$\bar{0} := \{2n | n \in \mathbb{Z}\}, \bar{1} := \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}.$$

そして, $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ として議論していく \mathbb{Z}_2 は体 (field) であり, 実数のように四則演算に関して自由に計算できる. 体というのは 2 項演算を 2 つ持っていて, いくつかの条件を満たすものである. ここでいう 2 項演算というのは $+$ と \times のことであり, 表 10, 11 のように振る舞う.

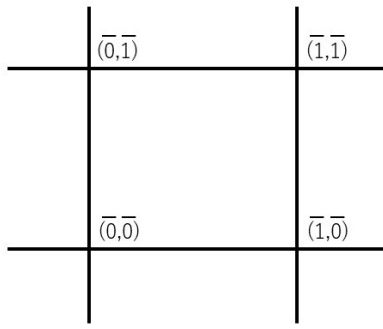
表 10: \mathbb{Z}_2 における足し算表

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

表 11: \mathbb{Z}_2 におけるかけ算表

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

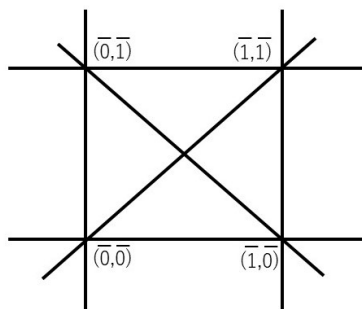
そして $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の要素を (x, y) 平面で表すと下図のようになる.



ここで $y = ax + b$ と $x = c$ を満たす点の集合は以下のように分類できる.

- $x = \bar{0}$ の場合
この式の解は $(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})$ である. よって l_1 を表している.
- $x = \bar{1}$ の場合
この式の解は $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})$ である. よって l_2 を表している.
- $y = ax + b, (a, b) = (\bar{0}, \bar{0})$ の場合
この式は $y = \bar{0}$ と表せるので, これを満たすのは $(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})$ である. よって l_3 を表している.
- $y = ax + b, (a, b) = (\bar{0}, \bar{1})$ の場合
この式は $y = \bar{1}$ と表せるので, これを満たすのは $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1})$ である. よって l_4 を表している.
- $y = ax + b, (a, b) = (\bar{1}, \bar{0})$ の場合
 $y = \bar{1}x = x$ より, これを満たすのは $(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})$ である. よって l_5 を表している.
- $y = ax + b, (a, b) = (\bar{1}, \bar{1})$ の場合
 $y = x + \bar{1}$ より, これを満たすのは $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})$ である. よって l_6 を表している.

このように有限平面 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に 6 本の直線を考えることが出来て, アフィン平面の公理を満たすことも確認できます.



4.2 有限平面 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

\mathbb{Z}^3 の同値類は \mathbb{Z}_3 と同じように求めると, $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ であることが分かる. また \mathbb{Z}_3 は体になっている.

$$\bar{0} := \{3n | n \in \mathbb{Z}\}, \bar{1} := \{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}, \bar{2} := \{3n + 2 | n \in \mathbb{Z}\}.$$

そして二項演算は表 3,4 のように振る舞う.

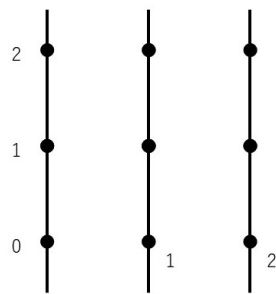
表 12: \mathbb{Z}_3 における足し算表

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

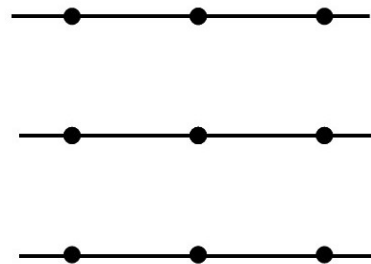
表 13: \mathbb{Z}_3 におけるかけ算表

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

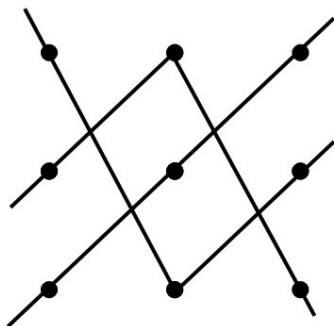
ここから有限平面 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ と同様に議論していくが, 計算過程は省略する.



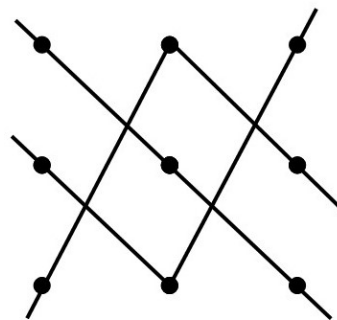
(i) $x = b$ の場合



(ii) $y = b$ の場合



(iii) $y = x + b$ の場合



(iv) $y = 2x + b$ の場合

ここで直線が $3 \times 4 = 12$ 本存在しており, 定理 3.4.4 と一致することが分かる. よって \mathbb{Z}_3 が体となっていることから, アフィン平面の公理を満たす.

4.3 有限平面 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$?

表 14: \mathbb{Z}_4 における足し算表

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

表 15: \mathbb{Z}_4 における掛け算表

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

\mathbb{Z}_4 における足し算については問題ない. しかし \mathbb{Z}_4 における掛け算に注目すると,

$$\bar{2} \times x = \bar{1}$$

を満たす x を見つけることが出来ない. また, $\bar{2} \times x = \bar{2}$ を満たす x は $\bar{1}, \bar{3}$ と一意に定まらない. よって, \mathbb{Z}_4 は体として扱うことが出来ない. これは $4 = 2 \times 2$ が素数でないことが起因している. 次の段落では, これに少し手を加えて \mathbb{Z}_4 とそっくりの体を定める.

4.4 有限平面 $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4$

$a + bz, (a, b \in \mathbb{Z}_2)$ という未知数 z に関する一次式を考える. そして, 得られる 4 つの元

$$\bar{0} + \bar{0}z, \bar{1} + \bar{0}z, \bar{0} + \bar{1}z, \bar{1} + \bar{1}z$$

を要素と持つ集合を \mathbb{F}_4 と表す. するとこの集合において和を定義することが出来るので, 表 16 を得る.

表 16: \mathbb{F}_4 における足し算表

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	z	$\bar{1} + z$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	z	$\bar{1} + z$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1} + z$	z
z	z	$\bar{1} + z$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1} + z$	$\bar{1} + z$	z	$\bar{1}$	$\bar{0}$

一方掛け算に関しては,

$$z \times z = z^2, z \times (\bar{1} + z) = z + z^2$$

など, \mathbb{F}_4 に含まれない元 z^2 が表れる. ここで既約である $\bar{1} + z$ を用いて,

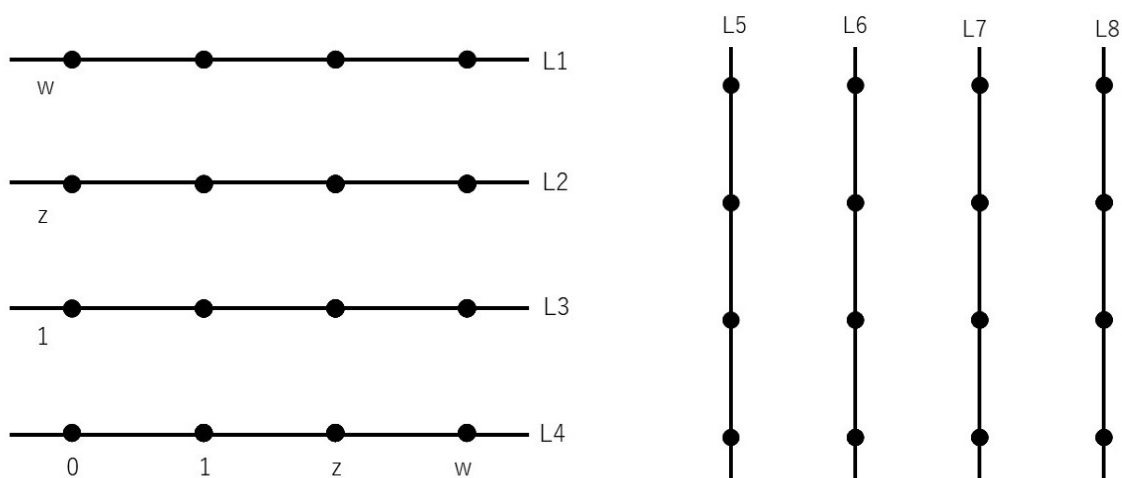
$$z^2 \equiv \bar{1} + z$$

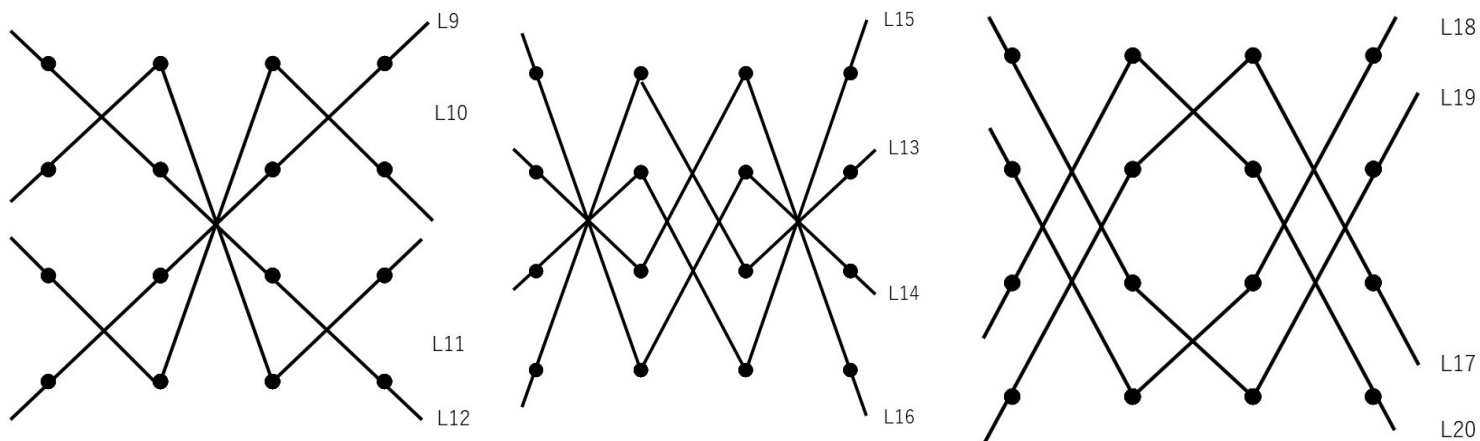
と定めることにする. すると, 表 17 を得る.

表 17: \mathbb{F}_4 における掛け算表

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	z	$\bar{1} + z$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	z	$\bar{1} + z$
z	$\bar{0}$	z	$\bar{1} + z$	$\bar{1}$
$\bar{1} + z$	$\bar{0}$	$\bar{1} + z$	$\bar{1}$	z

有限平面 $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4$ は全部で $4 \times 4 = 16$ 個もの元があり, 直線を $y = ax + b, x = c$ で表すことが出来る. ここでも計算過程は省略するが, 以下のような図を得ることが出来る.





5 アフィン平面と魔法陣

ここまでの知識を用いることで、第1章で作ることの出来なかった4次のオイラー方陣を生成することが出来ます。まずは得られた4次アフィン平面の直線の組から任意の2つを選んできます。今回は $(L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}), (L_{17}, L_{18}, L_{19}, L_{20})$ を選びました。

次に、 L_9 が点 (i, j) を通るとき、 (i, j) のマスに0を入れます。簡単のために $\bar{0} = 0, \bar{1} = 1, \bar{1} + z = \omega$ とおくと、表18を得る。

表 18: 0 の位置

ω				0
z			0	
1		0		
0	0			
	0	1	z	ω

その次は L_{10} が点 (i, j) を通るとき、 (i, j) のマスに1を入れます。

表 19: 1 の位置

ω			1	
z				1
1	1			
0		1		
	0	1	z	ω

L_{11} が点 (i, j) を通るとき、 (i, j) のマスに2を入れます。

表 20: 2 の位置

ω		2		
z	2			
1				2
0			2	
	0	1	2	ω

L_{12} が点 (i, j) を通るとき, (i, j) のマスに 3 を入れます.

表 21: 3 の位置

ω	3			
z		3		
1			3	
0				3
	0	1	2	ω

そして全て合わせると, 以下のようなラテン方陣を得ることが出来ます.

表 22: \mathbb{F}_4 から得られたラテン方陣 (1)

ω	3	2	1	0
z	2	3	0	1
1	1	0	3	2
0	0	1	2	3
	0	1	2	ω

上と同じ操作を $(L_{17}, L_{18}, L_{19}, L_{20})$ に対して行います.

L_{17} が点 (i, j) を通るとき, (i, j) のマスに 0 を入れます.

表 23: 0 の位置

ω			0	
z		0		
1				0
0	0			
	0	1	z	ω

L_{18} が点 (i, j) を通るとき, (i, j) のマスに 1 を入れます.

表 24: 1 の位置

ω				1
z	1			
1			1	
0		1		
	0	1	z	ω

L_{19} が点 (i, j) を通るとき, (i, j) のマスに 2 を入れます.

表 25: 2 の位置

ω	2			
z				2
1		2		
0			2	
	0	1	2	ω

L_{20} が点 (i, j) を通るとき, (i, j) のマスに 3 を入れます.

表 26: 3 の位置

ω		3		
z			3	
1	3			
0				3
	0	1	2	ω

そして全て合わせると, 以下のようなラテン方陣を得ることが出来ます.

表 27: \mathbb{F}_4 から得られたラテン方陣 (2)

ω	3	2	1	0
z	2	3	0	1
1	1	0	3	2
0	0	1	2	3
	0	1	2	ω

2つのラテン方陣から, 次のオイラー方陣を得ることが出来る.

表 28: 0 の位置

(3, 2)	(2, 3)	(1, 0)	(0, 1)
(2, 1)	(3, 0)	(0, 3)	(1, 2)
(1, 3)	(0, 2)	(3, 1)	(2, 0)
(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)

後は第一章で行った計算をすれば, 4 次の魔法陣を手に入れることが出来る.

定理 6.5.1 A n 次のアフィン平面に対して, 互いに直交する $(n - 1)$ 個のラテン方陣が存在する.

定理 6.5.1 B 互いに直交する $(n - 1)$ 個のラテン方陣が存在すれば, n 次のアフィン平面が存在する.

ここまでで, $n = 4$ のときの魔法陣の求め方について議論してきた. 次はすべての n に対して, n 次の魔法陣は存在するのか, またどんな n に対して魔法陣が存在するのかを考える. 一般に n が与えられたとき, n が奇数のときは存在しました. また n が偶数の場合は,

$$n = 2^q \times l, (l = 2k + 1, k, q \in \mathbb{N})$$

と分解することができた. このとき $q \geq 2$ の場合は 2^q 次のアフィン平面が存在しますが, $q = 1$ の場合, 1 個のラテン方陣しか得られず, 魔法陣が存在するか断定できませんでした. この $q = 1$ のとき, $l = 2k + 1$ より, $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$ となることから, $n = 4k + 2, (k = 1, 2, \dots)$ の場合にオイラー方陣が存在するのかが大きな問題になりました (オイラーの士官 36 人の問題). 結局この問題は数十年前に解決され, $n=2, 6$ 以外ではオイラー方陣が存在することが示されました.

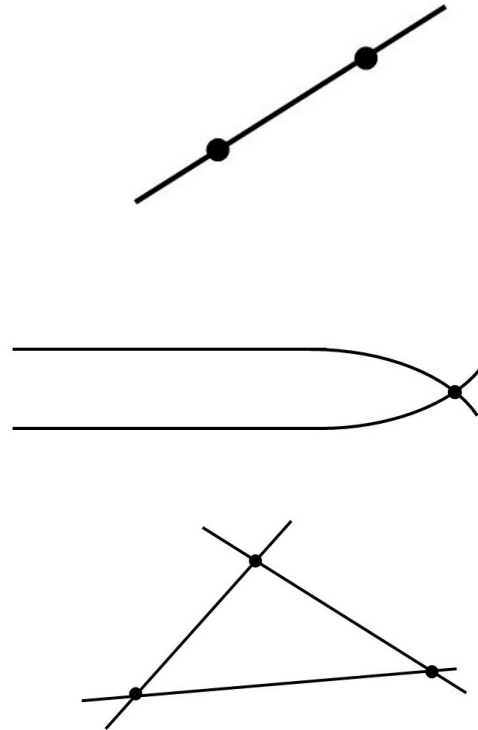
6 射影幾何学

アフィン平面では平行な直線が存在し, 異なる平行な直線同士では共有点を持たなかった. しかし実はすべての直線が交点を持つとしても何の問題もなく, これまで考えてきたユークリッド幾何学とは異なる, 非ユークリッド幾何学という幾何学の体系を考えることが出来る.

6.1 射影平面

射影平面の公理

- 公理 PP1
異なる 2 点を通る直線はただ一つ存在する.
- 公理 PP2
異なる 2 本の直線は必ず交わる.
- 公理 PP3
1 本の直線にない 3 点が存在する.
- 公理 PP4
直線は少なくとも 3 点以上を含む.



6.2 射影平面とアフィン平面

アフィン平面の公理から, 平行な直線同士は交点を持たないということが言えます. しかしここでは平行 \parallel という同値関係で得た同値類に対して, 新しい点を付け加えることにします. つまり以下のように定義します.

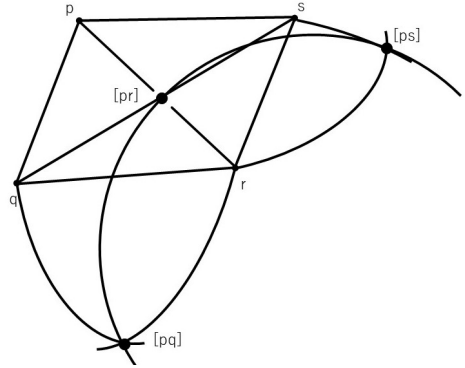
無限遠点の定義

アフィン平面の平行によって成された同値類の任意の元 a, b に対して, $a \cap b = z$ を満たすような点 z が存在し, その点を無限遠点と呼ぶ. また全ての無限遠点を通る直線を l_∞ と表し, 無限遠直線とよぶ.

このようにアフィン平面に無限遠点, 無限遠直線を与えたものを $P(A)$ と表すことができ, この $P(A)$ をアフィン平面 A の完備化という. このあとは射影平面の公理を満たすことを示す.

$P(A)$ の簡単な例

この図は定理 3.3.2 を解説したときに使ったアフィン平面 A_4 に無限遠点, 無限遠直線を加えたものになる. この平面 A_4 は 4 つの点と 6 本の直線を持っており, $pq \parallel rs, pr \parallel qs, ps \parallel qr$ である. それらのグループの各々に無限遠点を加える. 無限遠点は全部で $[pq] = [rs], [pr] = [qs], [ps] = [qr]$ の 3 点になる. また新しい直線 l_1 を加えることになる.



定理 6.2.2 射影平面上では, 点の個数と直線の個数が等しく, どちらも $n^2 + n + 1, n \in \mathbb{N}$ である.

6.3 射影平面の双対性

次に射影平面の双対性を示す. つまり射影平面では最初に「点」から「直線」を与えていたが, 反対に「直線」から「点」を構成するような射影平面があるか考える. 射影平面 π が与えられたとき, 以下のような π_* を作る.

- π_* の「点」を, π の直線とする.
- π_* の「直線」を, π のある 1 点を通る直線の集まりとする.

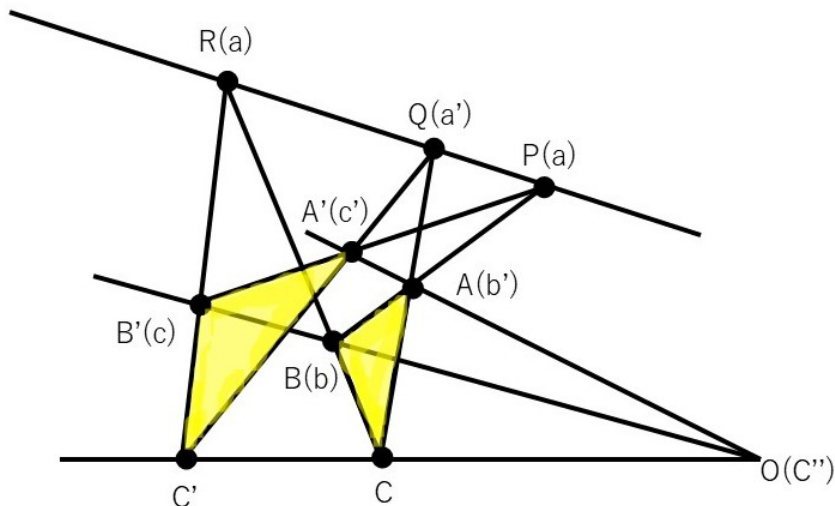
このとき, π_* は公理 $PP1, 2, 3, 4$ を満たし, 射影平面になる.

6.4 テザルグの定理

定理 6.3.1 テザルグの定理 (PP5) $ABC, A'B'C'$ を2つの三角形とし, 対応する頂点を結ぶ3直線 AA', BB', CC' が1点 O で交わっているとす。そのとき, 対応する辺同士の交点

$$P = AB \cap A'B', Q = CA \cap C'A', R = BC \cap B'C'$$

は一直線上にある。もしくは, 「点透視の2つの三角形は線透視である。」と言い表すことができる。



定理 6.3.1 テザルグの定理の逆 (PP*5) $ABC, A'B'C'$ を2つの三角形とし, 対応する対応する辺同士の交点

$$P = AB \cap A'B', Q = CA \cap C'A', R = BC \cap B'C'$$

が1直線上にあるとする。そのとき, 対応する頂点を結ぶ3直線 AA', BB', CC' は1点で交わる。
「テザルグの定理 ⇒ テザルグの定理の逆」の証明

