

# セルオートマン法による渋滞のモデル化

数理科学研究会 1年 竹内結香

2023年11月3日

## 目次

1	<b>はじめに</b>	3
1.1	研究背景 . . . . .	3
1.2	渋滞はどこに見られるのか . . . . .	3
2	<b>渋滞とは</b>	3
2.1	渋滞の原因 . . . . .	3
2.2	自己駆動粒子 . . . . .	3
2.3	基本図 . . . . .	3
2.4	実測データ . . . . .	4
2.5	メタ安定 . . . . .	4
3	<b>数理モデルによる渋滞の解析</b>	4
3.1	セルオートマン法 . . . . .	4
3.2	ルール 184 . . . . .	5
3.3	ASEP . . . . .	6
3.4	クイックスタートモデル . . . . .	9
3.5	スロースタートモデル . . . . .	10
4	<b>終わりに</b>	12

# 1 はじめに

## 1.1 研究背景

世の中にある現象を解析するさいに、如何に単純なルールでより現実に即したモデルを導入できるかが重要となる。今回はそんな世の中の社会現象・自然現象の中でも渋滞について取り上げ考える。今後、様々な現象を数理的に見ていくための初めの一步として、この渋滞のモデル化について研究することとする。

## 1.2 渋滞はどこに見られるのか

渋滞とひと口に言っても様々な渋滞がある。車や人の渋滞はもちろんのこと通信の渋滞や在庫の渋滞など身の回りには多くの渋滞が存在している。渋滞=停滞ととらえるならば多くの渋滞をモデル化できればよりよいだろうが、今回は車や人の渋滞について考えていくものとする。

# 2 渋滞とは

## 2.1 渋滞の原因

ではなぜ渋滞は起こるのだろうか。車による渋滞にはいくつかの要因が挙げられる。渋滞というと交通事故などによるものを想像しやすいが、2021年のデータによると、高速道路における渋滞原因の第1位は、上り坂やサグ部となっている。「サグ」とはたわむという意味で、道路が緩やかにたわんでいる状態のことを表している。100m進むと1m上昇(または下降)するくらいの坂道であり、このように勾配がゆるやかであるとドライバーは自分の速度変化に気づきにくい。そこで上り坂では車のスピードが少し落ちてしまう。するとその後ろを走っている車は車間距離が縮まったことを感じて軽くブレーキを踏むかもしれない。そしてそのブレーキの連鎖が後ろ、後ろへと伝わっていき、数十台後ろの車では止まってしまうほどの強いブレーキになってしまうこともある。先頭のほんの少しの減速というのが後ろの大渋滞を引き起こしてしまうのである。他の例としては、トンネルでは暗さや両側が閉ざされているという閉塞感で心理的なプレッシャーがかかり車が減速したり、またトンネル内に水がたまらないようにサグ部を導入していたりと、これも渋滞の原因となっている。他にも、インターチェンジでの合流部や分流部での減速やETCでの減速、カーブなども挙げられる。

## 2.2 自己駆動粒子

渋滞現象というのは、モノの流れが滞る現象であり、これら動的なふるまいを抽象化して表し、数理モデルを構築していく。そこで、様々な流れるモノを粒子と呼ぶことにする。自然界に存在する粒子というのは「慣性の法則」に慕っており、何かの力で押されない限り方向転換はできず、力をかけずに急に止めることもできない。さらに、押された分の力で相手を押し返す「作用・反作用の法則」もある。しかし社会で渋滞をつくる人間や車はどうだろうか。人間や車は自らの意思をもって動き、誰かに押されなくとも様々な方向に動けるし、速さも変えられる。急に止まることも可能である。例えば人間が街中を歩くとき、前から人が向かってきたら、お互い衝突しないように前もって適当に衝突を回避するだろう。このように、人間や車の動きというのは心理的な要因で決まり、大きさを定量的に量ることができない。このような粒子のことを「自己駆動粒子」というふうと呼ぶ。この「自己駆動粒子」の動きをモデル化して考える必要がある。

## 2.3 基本図

ここで、交通量の解析に必要な「基本図」というものについて書く。基本図というのは、縦軸に交通流量、横軸に交通密度をとって描いたものである。流量とは速度と密度の積で表されるものである。具体的にいえば、密度はその地点の付近1kmあたり何台の車がいるかで表し、流量はその地点を5分間に通過する車の総台数を表す。

## 2.4 実測データ

高速道路での実測データを基本図に起こしたのを見てみる。

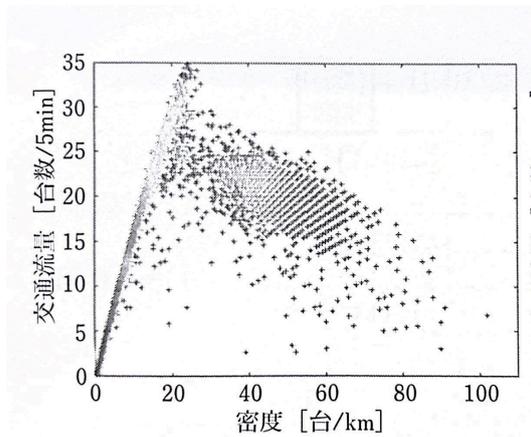


図1 中央自動車道

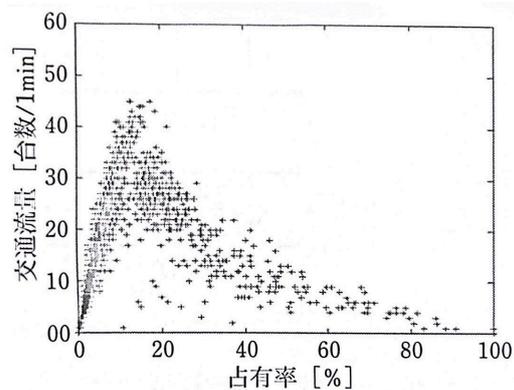


図2 首都高速道路

上の図は高速道路での基本図の実測データである。

密度が低い、つまり渋滞していない左半分の部分は右上に伸びる直線状のデータとなっている。これは自由に動いている車の数が多いほどある地点のセンサーを通過する車の数も増えることになる。つまり低密度の領域では車の密度と流量は比例するというのである。そして、図の直線の傾きは車の平均的な自由走行の速度を表していることになる。この速度を図から読み取ると、およそ時速84km というようになることがわかる。

次に渋滞側を見てみる。渋滞しているときはあまり車は動けずセンサーを通過できる車の数は減っていき、また密度はどんどん大きくなっていく。よって全体として右に下がったようなデータが現れることが分かる。

今回のこの図によると臨界状態は1kmあたり約25台と読むことができ、これが臨界密度ということになる。つまり車間距離でいえば約40m以下になった時が渋滞ということが分かる。

## 2.5 メタ安定

ここでメタ安定というものについて触れておく。メタ安定とは車間距離が40m以下になっても自由走行の速度約80km程度で走り続けられている状態のことを指す。しかしメタ安定状態では渋滞になってもおかしくない密度にもかかわらず、渋滞せずに自由走行の速度で走り続けているので、車群が車間距離を詰めて走行している不安定な状態となる。何らかの原因で短時間だけ出現する不安定な状態をメタ安定状態というふうによんでいる。これは水が氷になるときにみられる過冷却の状態や水が水蒸気になるときにみられる過沸騰などもこのメタ安定状態であり、これは本来あるべき状態でないため非常に不安定である。また、たたくなどの何らかの小さなきっかけで突然水の状態が変化することが起こる。車や人の渋滞も同様で、1台の車の軽いブレーキや、人が歩行速度を落とすなどの些細な原因によりこの状態は一気に崩れ、渋滞へと変化する。

## 3 数理モデルによる渋滞の解析

### 3.1 セルオートマン法

渋滞を抽象化して表すのに「セルオートマン法」というモデル化の方法を用いる。セルオートマンは有限個のセルと単純なルールによってあらわされるモデルのことで、非常に単純化されたモデルであるが、生命現象、結晶の成長、乱流といった複雑な自然現象の解析に驚くほどに豊かな結果を与えてくれる。

今回は一次元空間を各セルに区切り、各セルには粒子が最大1つだけ入るものとし、両端はサーキッド状につながっ

ているものとする。これは周期境界条件といい、最後のセルと最初のセルは接続されているという考え方である。最後のセルにいる車が進行方向へ進む時、最初のセルを前方のセルと考え、最初のセルに進む。粒子の数が少なければ、操作を繰り返すことで粒子はバラけてお互いに邪魔せず進み続けることができる。逆に粒子の数が増えれば粒子同士がたがいに邪魔し合い動けない集団が発生する。これを渋滞クラスターといい、クラスターができないギリギリの状態、つまりあと一つ粒子が増えるとクラスターが初めて発生するような状態を臨界状態という。

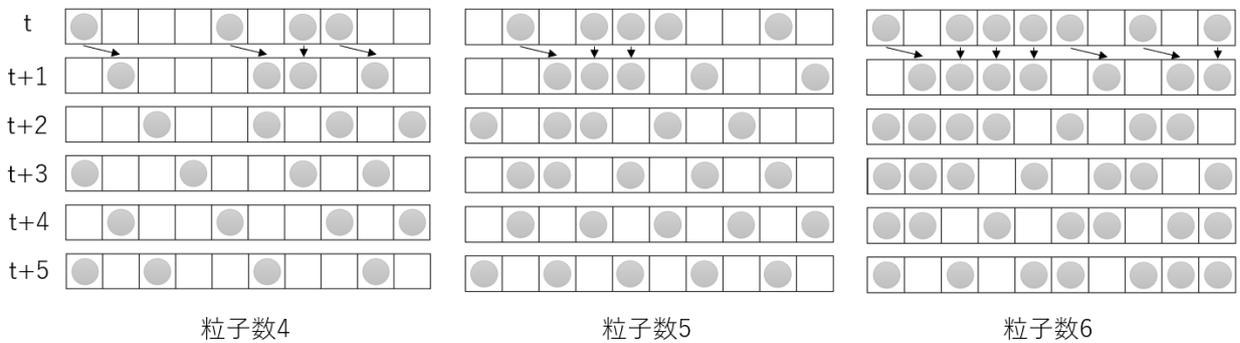
### 3.2 ルール 184

#### 3.2.1 ルール 184

まず最初に課すルールとして、ルール 184 というものを考える。これはセルオートマン法の中で最も基本的で単純な方法で、以下のような条件を用いる。

条件 1. 1つ前のセルに車が存在しない場合、次のセルに進む。

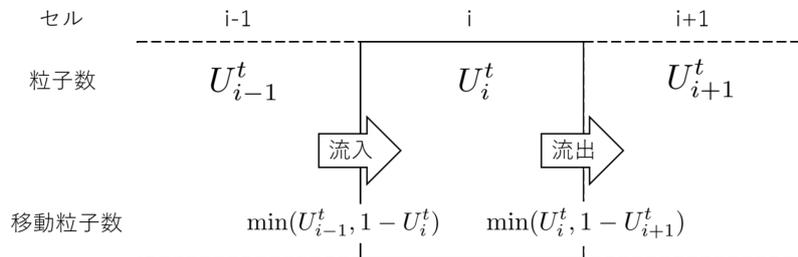
条件 2. 1つ前のセルに車が存在する場合、そのステップに留まる。



これは上の図のように粒子が動く。ちなみにこれは繰り返していくと、セルの数に対して粒子の数がちょうどセルの半分であるときまで粒子はクラスターをつくらずに動き続けることができる。つまり今回は 10 個のセルに対して 5 個までの粒子数であれば、クラスターつまり渋滞をつくらずに動くことができ、臨界状態は  $\frac{1}{2}$  ということになる。

#### 3.2.2 ルール 184 の数式化

これを数式で表すことを考える。各セルの状態を  $U_i^t$  とし、粒子が存在する状態を  $U_i^t = 1$ 、粒子が存在しない状態を  $U_i^t = 0$  で表すとす。このとき、時間  $t + 1$  における  $i$  のセルの状態は、



$$U_i^{t+1} = U_i^t + \min(U_{i-1}^t, 1 - U_i^t) - \min(U_i^t, 1 - U_{i+1}^t)$$

と表される。ある時間  $t$  における  $i$  のセルに粒子がいる場合、時間  $t + 1$  では、時間  $t$  にセル  $i$  にいた粒子がとなりのセル  $i + 1$  に移動する、もしくは時間  $t$  に粒子がいなかったセル  $i$  にセル  $i + 1$  から粒子が移動してくる、の 2 通りのみ

起き得る. 時間  $t$  にセル  $i$  に粒子がいる ( $U_i^t = 1$ ) とき, 第 2 項目消え, となりのセル  $i+1$  が空 ( $U_{i+1}^t = 0$ ) なら第 3 項目の値により, セル  $i$  の粒子が流出する. 時間  $t$  にセル  $i$  が空 ( $U_i^t = 1$ ) のとき, 第 3 項目消え, ひとつ前のセル  $i-1$  に粒子があるなら第 2 項目の値により, セル  $i$  に粒子が流入する.

### 3.3 ASEP

#### 3.3.1 ASEP モデル

つぎにルール 184 に確率を加えた ASEP モデルというものを考える. ASEP モデルはルール 184 の条件のうち, 1 つ目のルールに確率が加わる.

条件 1. 1 つ前のセルに車が存在しない場合, 確率  $p$  で次のセルで進む.

条件 2. 1 つ前のセルに車が存在する場合, そのステップに留まる.

この条件で確率  $p = 1$  のとき, ルール 184 に帰着する.

#### 3.3.2 ASEP モデルの流量

ASEP モデルの流量について考える.



上に示すような状態確率をそれぞれ  $\Pi(00)$ ,  $\Pi(01)$ ,  $\Pi(10)$ ,  $\Pi(11)$  とする. 空間の一様性から,

$$\Pi(10) = \Pi(01)$$

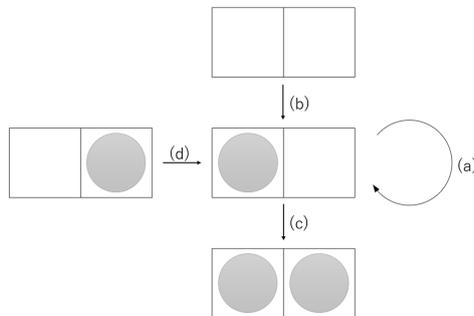
連続した 2 つのセルをランダムに取り出したときに, (00) という配置もしくは (01) という配置になる確率は, ある 1 つのセルを取り出したときにそのセルの状態が 0 になる確率に等しい. よって, 密度  $\rho^{*1}$  を用いて,

$$\Pi(10) + \Pi(01) = 1 - \rho$$

規格化条件より,

$$\Pi(00) + \Pi(10) + \Pi(01) + \Pi(11) = 1$$

さらに, ある状態から (10) になる確率は, 次の図から,



\*1 粒子密度  $\rho = (\text{粒子密度})/(\text{セルの総数})$  で与えられる.

$$\Pi(10) = \underbrace{(1-p)\Pi(10)}_{(a)} + p \underbrace{\frac{\Pi(10)}{\Pi(10)+\Pi(00)}\Pi(00)}_{(b)} + p \underbrace{\frac{\Pi(10)}{\Pi(10)+\Pi(11)}\Pi(11)}_{(c)} + p^2 \underbrace{\frac{\Pi(10)}{\Pi(10)+\Pi(11)} \frac{\Pi(10)}{\Pi(10)+\Pi(11)}\Pi(01)}_{(d)}$$

と書ける.

これら4つの式から,

$$p\Pi(10)^2 - \Pi(10) + \rho(1-\rho) = 0$$

$$\therefore \Pi(10) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p\rho(1-\rho)}}{2p}$$

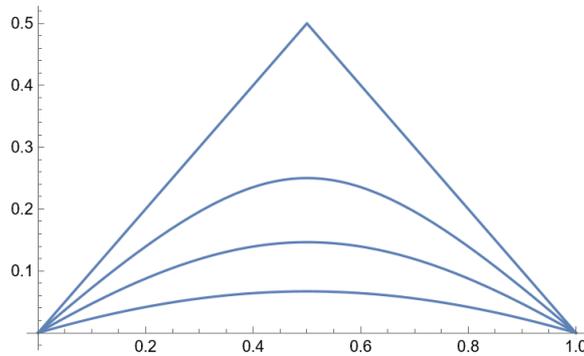
$0 \leq \Pi(10) \leq 1$  より, 流量  $Q^{*2}$  は  $Q = p\Pi(10)$  から,

$$Q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p\rho(1-\rho)}}{2} \quad (1)$$

これについて  $\rho$  に関する極値を計算すると,  $\rho = \frac{1}{2}$  で極値をもち, 臨界密度が確率  $p$  によらず  $\frac{1}{2}$  であることがいえる.

### 3.3.3 ASEP モデルの基本図

ここで, ASEP モデル ( $p = 1$  でルール 184 も含む) の基本図を考える. 2.3 でも前述した通り基本図とは縦軸に流れた粒子の量を表す流量  $Q$ , 横軸に横軸に粒子密度  $\rho$  をとったものである. ここでは式 (1) について,  $p = 1$  (ルール 184),  $p = 0.75$ ,  $p = 0.5$ ,  $p = 0.25$  の場合を考えることにする. このとき基本図は以下ようになる (上から,  $p = 1$ ,  $p = 0.75$ ,  $p = 0.5$ ,  $p = 0.25$ ).



$\rho = \frac{1}{2}$  以下では密度が増えるにつれて交通流量も増えているが,  $\rho = \frac{1}{2}$  を境に粒子はスムーズに移動することができなくなり密度が増えるにしたがって流量は減少する. つまり, ASEP モデルの臨界状態が  $\frac{1}{2}$  であることがこの基本図からもわかり, 密度  $\rho = \frac{1}{2}$  以上で渋滞が発生する. ちなみにこのときメタ安定は発生していない.

### 3.3.4 ASEP の定常状態の存在

TASEP のように, 未来の挙動が現在の状態のみで決まる特性をマルコフ性という. 時刻  $t$  における状態ベクトル (状態数は有限) を  $\Pi_t$  と表し, 遷移確率行列  $P$  を用いて,

$$\Pi_{t+1} = P\Pi_t$$

\*2 交通流量  $Q = \rho \times (\text{時間 1 ステップで動いた粒子数}) / (\text{粒子の総数})$  で与えられる.

と表せる.

ここで,  $\Pi_t$  の取りうる状態数を  $m$  としたとき, 時刻  $t$  における各状態  $S_{i \in m}$  を用いて,

$$\Pi_t = \begin{pmatrix} \Pi_t(S_1) \\ \Pi_t(S_2) \\ \vdots \\ \Pi_t(S_m) \end{pmatrix}, \text{ただし, } \sum_i \Pi_t(S_i) = 1$$

遷移確率行列  $P$  は状態  $S_i \rightarrow S_j$  の遷移行列を  $p(j, i) \geq 0$  としたときに, 各状態遷移に対する遷移確率を表現した行列であり, 次のような形で表される.

$$P = \begin{pmatrix} p(0,0) & \cdots & p(0,i) & \cdots & p(0,m) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p(j,0) & \cdots & p(j,i) & \cdots & p(j,m) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p(m,0) & \cdots & p(m,i) & \cdots & p(m,m) \end{pmatrix}$$

ある状態から遷移する場合, 必ずどれかの状態に移るため, すべての  $j$  について, その遷移確率の総和をとると 1 になる\*3.

$$\sum_j p(j, i) = 1$$

定常状態では時間が経過しても分布は変化しないので, 定常分布を  $\Pi$  とすると,

$$\Pi = P\Pi$$

が成り立ち, これを満たす  $\Pi$  が一意に存在するかを示せばよい. この方程式の固有値が 1 であることから,  $P$  の固有値に対する固有ベクトルを求めれば, それが定常分布となることが分かる. このような  $\Pi$  が存在することは Perron-Frobenius の定理によって保証される.

Perron-Frobenius の定理

正の正方行列  $A$  は次を満たす正の固有値  $\alpha$  をもつ.

1.  $A$  の任意の固有値  $\beta$  の絶対値に対して,  $|\beta| < \alpha$  を満たす.
2. 固有値  $\alpha$  の重複度は 1 であり, 固有値  $\alpha$  に属する正の固有ベクトルが存在する.
3.  $\alpha$  以外の固有値に属する正の固有ベクトルは存在しない.

Perron-Frobenius の定理を遷移確率行列  $P$  に適用すると, 遷移確率行列  $P$  が既約であれば絶対値最大固有値は 1 であり, しかも単純固有値となることが示せる. よって,  $\Pi = P\Pi$  を満たす定常分布  $\Pi$  が存在して, ただひとつであることが保証される.

ASEP において定常状態が一意に存在するということは, 最終状態が初期状態によらないことを示している. これは, 数値シミュレーションをする場合, どのような初期値を設定しても結果として得られる定常状態は普遍的なものとなることを表している.

### 3.3.5 定常状態の存在の有無

定常状態の存在の有無を確認することは,  $\Pi$  が可逆分布かを確認することで行うことができる.  $\Pi$  が可逆分布であるとは, すべての状態  $S_i, S_j$  に対して,

$$p(j, i)\Pi(S_i) = p(i, j)\Pi(S_j)$$

\*3 ただしその逆は必ずしも成立しない

を満たすことをいう。つまり、2つの状態間を遷移するそれぞれの頻度がつり合っている状態である。定常状態とは、 $\Pi = P\Pi$  であり、

$$\Pi(S_i) = \sum_{i=0}^m p(j, i)\Pi(S_i)$$

を満たしている。このことから、可逆分布であればそれは定常状態となることが次のように示される。

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m p(j, i)\Pi(S_i) &= \sum_{i=0}^m p(i, j)\Pi(S_j) \quad (\because \text{可逆分布の定義}) \\ &= \Pi(S_j) \sum_{i=0}^m p(j, i) \\ &= \Pi(S_j) \quad (\because \sum_{i=0}^m p(j, i) = 1) \end{aligned}$$

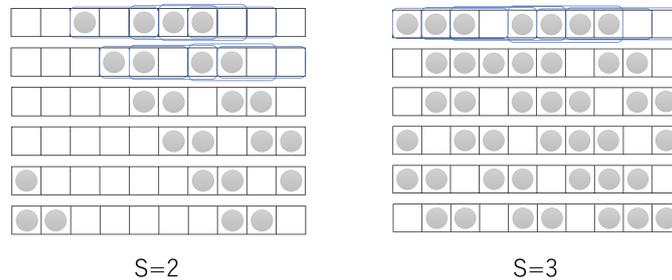
一方、定常分布ならば可逆分布というのは成り立たない。可逆分布は  $S_i \rightarrow S_j, S_j \rightarrow S_i$  をお互い1回で移る時のことをいうが、定常分布は多段階で遷移をすることもあるので定常分布ならば可逆分布は必ずしも成り立つとはいえない。

### 3.4 クイックスタートモデル

#### 3.4.1 クイックスタートモデル

より現実に即したルールを考える。その1つがクイックスタートモデルというもので、これは各粒子が進行方向  $s$  セル先まで見通せる能力をもっているものだ。これは以下の図のように動く。

ルール 184 では自分の前のみのセルを見て動くので、 $s = 1$  である。クイックスタートモデルでは一般に  $s$  セルを見通



せるので前が動くと分かればそれに着いて一緒に動き出す。人が歩くときも車を運転するときも、前の人がどのように動くのかという予測の下で行動しているので、このルールはこのような行動を反映したものといえる。

#### 3.4.2 クイックスタートモデルの基本図

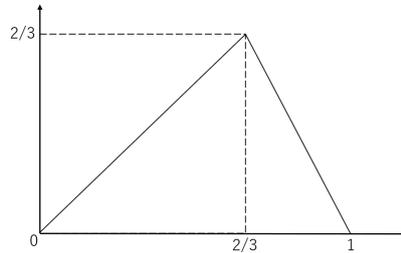
$s = 2$  の場合を考える。粒子は2個先のセルまで見通せるため一般の3個連続のセルを考え一番左のセルの動向を見ると、左の配置の場合には一番左の粒子は動くことができるが、右の配置の場合には一番左の粒子は動くことはできな



い。つまり、すべての粒子が動ける最大の状態というのは、



のような状態である。このときの平均密度は  $\frac{2}{3}$  であり、この状態がまさに臨界状態となる。粒子がこれより 1 つ増えれば動けない粒子が出てき、密度  $\frac{2}{3}$  を超えると流量が落ちて渋滞になることが分かる。つまり、クイックスタートモデルの基本図は縦軸を流量  $Q$ 、横軸を密度  $\rho$  として、以下のようなになる。

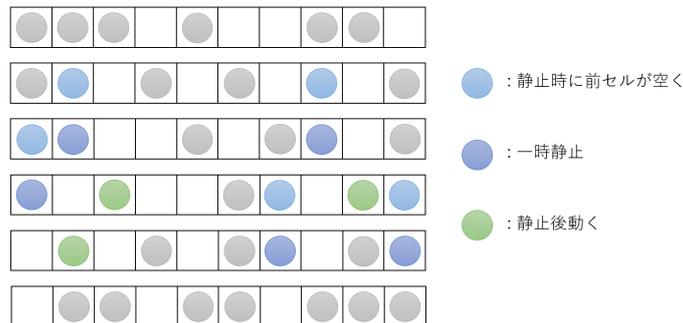


ASEP では臨界密度は  $\frac{1}{2}$  であったのに対し、2 つ先まで見通せるクイックスタートモデルでは臨界密度が  $\frac{2}{3}$  になっている。つまりこれは渋滞の発生を遅らせることができたということを示している。

### 3.5 スロースタートモデル

#### 3.5.1 スロースタートモデル

もう 1 つのルールとしてスロースタートモデルというものがある。これは、一度止まった粒子は前のセルが空いて動けるようになってからも一回休んでから動くというルールである。



これは車などを想像すると分かりやすいだろうが、一度止まったものが動き出すには多少とも時間がかかる。これは慣性の法則に従っており、物体はそのままの状態を維持し続けようとする性質によるものだ。これは慣性効果の小さい粒子ではなく、重い粒子の運動を考える際に使うモデルである。例えば人の運動を考えるときにはこのルールは必要ないかもしれないが、大型車やトラックなどはこのルールを入れると現実により即した結果が得られる。但しこれは現在の状態だけでその次の動きが決まるわけではなく、過去に止まったかどうかの影響してくるため、マルコフ過程ではなくなる。

#### 3.5.2 スロースタートモデルの基本図

まず初期位置が以下のように粒子がいるセルと空のセルが交互に並んでいて密度が  $\frac{1}{2}$  場合を考える。



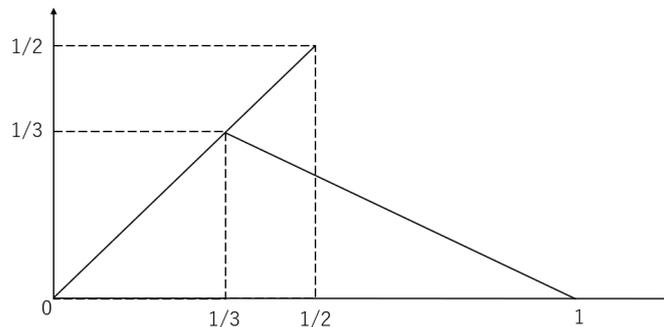
このときすべての粒子がその前の時刻で動いていたとすれば、次の時刻でもすべての粒子の前のセルが空いているため動くことができる。そしてこのときが流量は最大であり、これより 1 つ粒子が増えるとクラスターが発生してしまう。

また、同じ密度の  $\frac{1}{2}$  でも、以下のような状態の場合には変わる。



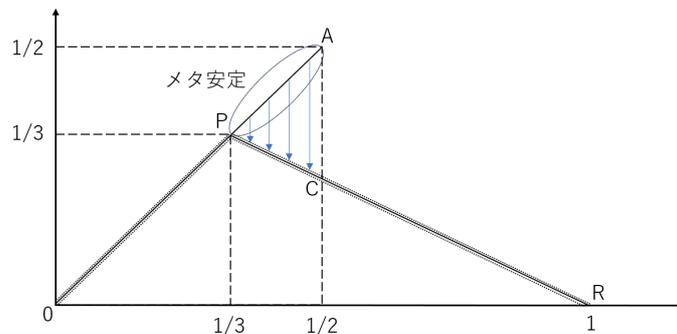
このとき、前にいる粒子のみが動くことができ、後ろの粒子は動けないということになる。つまり、流量は交互配置の半分になってしまうことが分かる。

このように同じ密度でも流量が複数ありうるがこのモデルの特徴で、密度が  $\frac{1}{3}$  から  $\frac{1}{2}$  の範囲では定常状態で取りうる流量は2つとなる。このとき流量が高い方がメタ状態となる。つまり次のような基本図を描けることになる。



### 3.5.3 スロースタートモデルのメタ安定

ここで、この状態でのメタ安定について触れておく。メタ安定とは臨界密度を超えた粒子数が存在していてもなかなか動くことができていないような不安定な状態である。メタ安定状態では、少しの乱れが起こるだけで流量が急激に落ち込んでしまう。



その様子を表したのが上の基本図であるが、たった1つの粒子があるステップで動かなかっただけで渋滞が成長してしまい、しばらくするとC点に相当する状態へと移ることがわかる。このC点における流れは、全く動けない渋滞クラスターと自由に動ける流れの混在した状態で、自由流の部分だけ取り出してみるとそれはP点に相当する流れの状態になっている。そして全く動けない状態はR点に相当している。このRとPの状態が共存して全体としてはCという密度と流量になっているということである。つまり、A-Pの線分上の状態がメタ安定状態であり、これはちょっとした変化でC-Pの線分上の点に移行する。逆に線分O-P上の自由流状態は安定で、ちょっとした減速があっても渋滞が発生しても、それはしばらくすれば回復して基本図では変化はない。そして線分P-R上の渋滞状態も同じく安定で、少しの変化があっても流量は不変である。

## 4 終わりに

### 今後の課題

今回の研究では、渋滞をみるにあたって幅広いモデルを導入した。これらのモデルの組み合わせを通じて、渋滞現象をより現実に即した方法で理解し、その解析を行うことが可能となる。この成果は、都市の交通問題に関する理解と改善に役立つ。渋滞は都市環境において広範な課題を引き起こし、交通効率、環境、安全性に影響を及ぼす。したがって、より現実的なモデルを利用することで、これらの課題への新たな洞察を獲得し、より有効な解決策を見つけ出すための基盤を築くことができる。今後もこのように、現象をより抽象的にかつより現実に近いようなモデル化によってみていきたい。

### 参考文献

- 三村昌泰編. 現象数理学入門. 東京大学出版会. 2013. p79-108
- 西成活裕. 渋滞学. 株式会社新潮社. 2007.
- 西成活裕. よくわかる渋滞学. 株式会社ナツメ社. 2009.