

次元の違うユークリッド空間は同相でない

数理科学研究会 bv22321 木村 敏樹

2023年10月31日

1 研究背景

今回の発表で私はトポロジーの手法を簡単に紹介したいと考えた。そこで次の定理を証明することを最終目的に設定した。

Theorem.

次元の異なるユークリッド空間は位相空間として同相でない:

$$n \neq m \Rightarrow \mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m.$$

この定理は非常にイメージが湧きやすいが、一筋縄ではいかない例として適切である。また同時に、トポロジーで重要になる球面の扱いが非常に多く登場する。以上がこの定理の証明を追うことがトポロジーの手法を紹介するに適切と考えた理由である。

2 特に重要となる概念

Definition 2.1 (同相)

位相空間 X と Y が同相 (*homeomorphic*) であるとは、同相写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいい、

$$X \approx Y$$

と表す。

位相空間が同相であるとはつまり、ある位相空間に同相な位相空間は、その位相空間の持つ位相的性質のみをもつことである。例えば、弧状連結な位相空間 X と同相な位相空間 Y はまた弧状連結となる。ここで、弧状連結性は位相不変量である。

Lemma 2.2

S^n を n 次元球面、 $P := (0, \dots, 0, 1), Q := (0, \dots, 0, -1) \in S^n$ とおき、 S^n の開被覆 $\{U, V\}$ を

$$U := S^n \setminus \{Q\}, \quad V := S^n \setminus \{P\}$$

とする。このとき次の同相が成り立つ。

- $U \approx V \approx \mathbb{R}^n$.
- $U \cap V \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

この補題は目標の定理を証明するうえで重要となる次の補題の証明の中核となる。

Definition 2.3 (ホモトピー同値写像, ホモトピー逆)

連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がホモトピー同値写像であるとは、連続写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在して

$$g \circ f \simeq 1_X: X \rightarrow X, \quad f \circ g \simeq 1_Y: Y \rightarrow Y$$

が成り立つことをいう。このとき、 g を f のホモトピー逆とよぶ。

Lemma 2.4

次のホモトピー同値が成り立つ。

$$U \cap V \simeq S^{n-1}.$$

次にホモロジー群の基本性質として、 n 次元球面の第 q ホモロジー群を事実として認めることにする。

Fact 2.5

$n \geq 1$ について

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0 \text{ or } n), \\ \{0\} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

以上に登場する概念により定理の証明が行えることになる。大まかな証明の流れは以下のようによい。

- \mathbb{R}^n と \mathbb{R}^m が同相と仮定する。
- 1点を取り除いた空間の同相が得られる。
- 1点を取り除いた空間と同相な空間が球面とホモトピー同値であることを用いる。
- ホモトピー同値であればホモロジー群が一致することを用いる。
- 合成写像に不条理があることから矛盾を得て定理を得る。

参考文献

- [河澄] 河澄響矢「トポロジーの基礎」(東京大学出版会), 2022年
[内田] 内田伏一「集合と位相」(裳華房), 1986年
[松本] 松本幸夫「トポロジー入門」(岩波書店), 1985年
[服部] 服部昌夫「位相幾何学」(岩波書店), 1979年