最大流最小カット定理

堀毛 晴輝

November 5, 2023

はじめに

はじめに

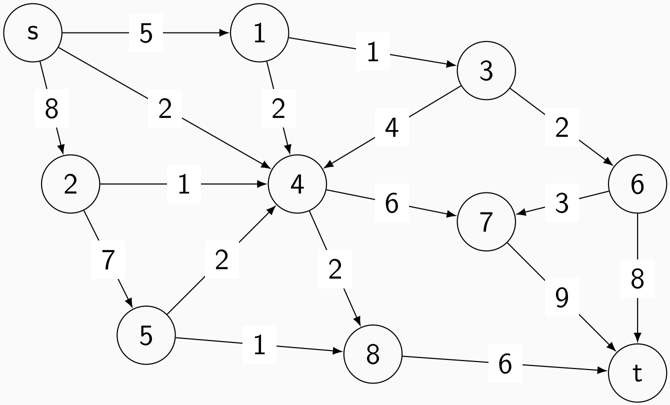
競技プログラミングにおいて，グラフ理論の知識を問われることがある．

今回は，グラフ理論の中の最大流最小カット定理を証明し，競技プログラミングの問題に応用する．

最大流最小カット定理

最大流問題

各辺に流せる水の量の最大値が決まっている有向グラフについて，始点 s から 終点 t に最大でどれだけ水が流せるか？



最大流問題

有向グラフ

空でない有限集合 V と $V \times V$ の部分集合 E の対 $G = (V, E)$ を有向グラフという．

また，各 $v \in V$ を頂点，各 $(u, v) \in E$ を辺という．

ネットワーク

次のような有向グラフ $D = (V, E, s, t, c)$ をネットワークという．

- 始点 (ソース) $s \in V$ が 1 つ存在する．
- 終点 (シンク) $t \in V$ が 1 つ存在する．
- 各辺 $e \in E$ に対し，容量 $c(e) \geq 0$ が定まっている．

最大流問題

フロー

次の制約条件下でネットワーク $D = (V, E, s, t, c)$ の各辺 $e \in E$ に対し，関数 $f : E \to \mathbb{R}$ を $s - t$ フロー (または単にフロー) という．

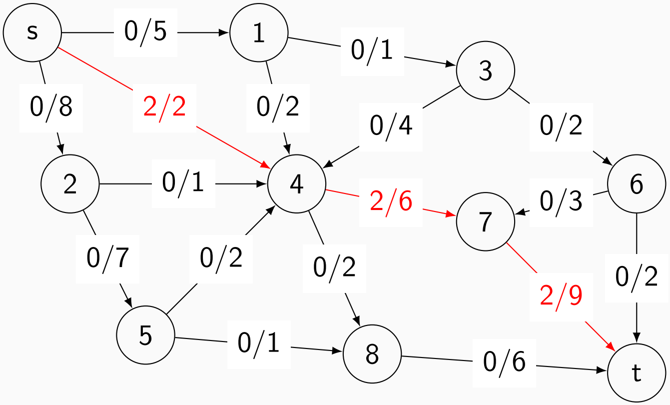
- 容量制限: 任意の $e \in E$ に対し， $0 \leq f(e) \leq c(e)$ を満たす．
- フロー保存則: s, t を除く任意の $v \in V$ に対し，
  $$\sum_{v\text{ に入る辺 }e} f(e) = \sum_{v\text{ から出る辺 }e} f(e)$$ を満たす．

また，ネットワーク D のフロー f に対して， s から出る (t に入る) 合計流量をフロー f の値と呼び， $\mathrm{val}(f)$ と表す．

$\to$ ネットワーク D に対し， $\mathrm{val}(f)$ を最大化するようなフロー f を最大流といい，これを求める問題を最大流問題という．

最大流問題

たとえば . . . これはフローの 1 つ: (各辺について， f/c でフローを表す)



上記の例では $\mathrm{val}(f) = 2$ ．最大を求めるには？

最小カット

カット

ネットワーク $D=(V,E)$ について，ある頂点集合 $S\subset V$ に対し S から出ていく辺の集合をカットといい， (S,S^c) で表す．また，その容量の和をカットの容量といい， $\mathrm{cap}((S,S^c))$ で表す．

とくに， $s\in S, t\in S^c$ となるようなカットを $s-t$ カットという．

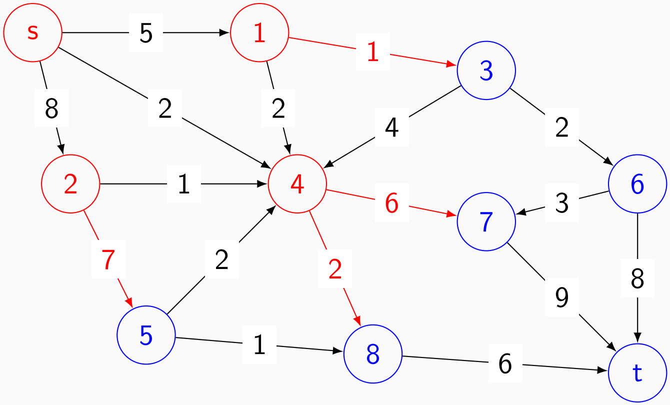
最小カット

ネットワーク $D=(V,E)$ の $s-t$ カットで，カットの容量が最小となるようなカット (S,S^c) をネットワーク D の最小カットという．

最小カットの容量は，言い換えると「ネットワーク D に対して， s から t へのパスが存在しなくなるために除去しなければならない辺の容量の和の最小値」

最小カット

たとえば . . . これは $s - t$ カットの 1 つ: ($S = \{s, 1, 2, 4\}$)



この場合は， $\mathrm{cap}((S, S^c)) = 1 + 6 + 2 + 7 = 16$ ．最大流と最小カットの関係は？

最大流最小カット定理

最大流最小カット定理

任意のネットワーク D において，最大流 f の値 $\mathrm{val}(f)$ と最小カット (S, S^c) の容量 $\mathrm{cap}((S, S^c))$ は等しい．

命題 1

ネットワーク D のフロー f とカット (S, S^c) が $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たすならば，f は D の最大流であり，(S, S^c) は D の最小カットである．

ネットワーク D の任意の $s-t$ フロー f と任意の $s-t$ カット (S, S^c) について，

- $\mathrm{val}(f) = (s$ から出る辺の流量総和$)$
- 任意の $v \in S \backslash \{s\}$ について，
  $(v$ から出る辺の流量総和$) = (v$ に入る辺の流量総和$)$

最大流最小カット定理

S の収支に着目すると，

$$\mathrm{val}(f) + (S\ \text{に入る辺の流量総和}) = (S\ \text{から出る辺の流量総和})$$

移項して，

$$\mathrm{val}(f) = (S\ \text{から出る辺の流量総和}) - (S\ \text{に入る辺の流量総和})$$

$(S$ から出る辺の流量総和$) \le (S$ から出る辺の容量総和$) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ であり，
$(S$ に入る辺の流量総和$) \ge 0$ であるから，$\mathrm{val}(f) \le \mathrm{cap}((S, S^c))$ が成り立つ．

これより， $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たすフロー f とカット (S, S^c) が存在すれば，フローの値はそれ以上大きくできないため， f は最大流であり， (S, S^c) は最小カットであることがわかる．よって命題 1 が示された．

最大流最小カット

命題 1(証明済)

ネットワーク D のフロー f とカット (S, S^c) が $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たすならば，f は D の最大流であり，(S, S^c) は D の最小カットである．

$\to$ 任意のネットワーク D について，$\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たすようなフロー f と最小カット (S, S^c) が存在すれば，最大流最小カット定理が示せる．

Ford - Fulkerson 法を用いることで，$\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たすフロー f と最小カット (S, S^c) が構築できる！

Ford - Fulkerson 法

残余容量

ネットワーク $D = (V, E)$ とそのフロー f について，次で定義される容量を残余容量という．

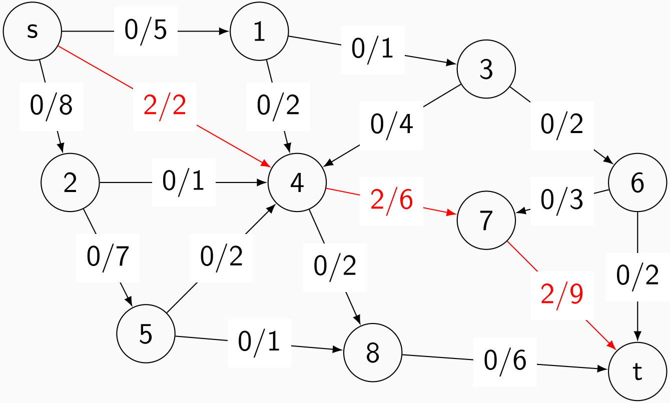
$$c_f((u,v)) := \begin{cases} c((u,v)) - f((u,v)) & (u,v) \in E \\ f((v,u)) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

残余ネットワーク

ネットワーク $D = (V, E)$ とそのフロー f について，残余容量 c_f によって定義されるネットワーク $D_f = (V, E_f)$ を残余ネットワークという．(
$E_f := c_f$が 0 でないような辺の集合)

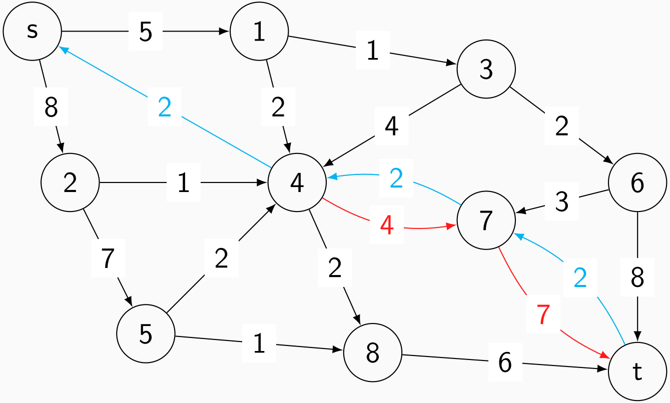
Ford - Fulkerson 法

たとえば . . . 先ほどのフローの例の残余ネットワークは，



Ford - Fulkerson 法

たとえば . . . 先ほどのフローの例の残余ネットワークは，次のようになる．



残余ネットワークについて，赤い辺は「あとどれくらいフローを流せるか」，青い辺は「どれくらい戻すことができるか」を表している．

増加道

残余ネットワークで，始点 s から終点 t へのパスで，パス上の任意の辺 e について $0 < c_f(e)$ が成り立つようなパスを増加道という．

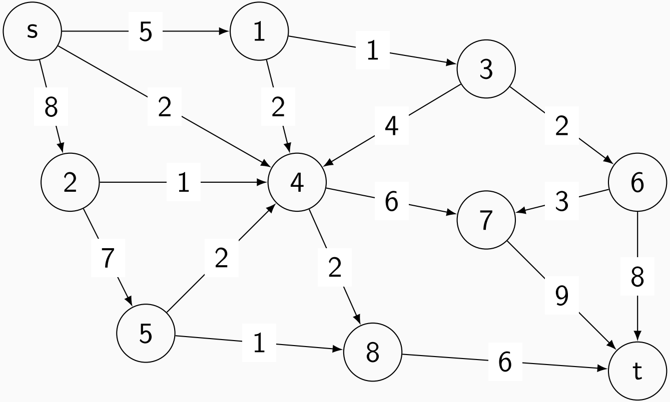
$\rightarrow$ 残余ネットワークに増加道が存在するとき，その増加道上の辺のうち残余容量が最小の辺の残余容量分を増加道に流すことができる．

Ford - Fulkerson 法

フロー f をはじめ 0 として，残余ネットワーク D_f に対して増加道が存在する限り，増加道に沿ってフローを増加させる．

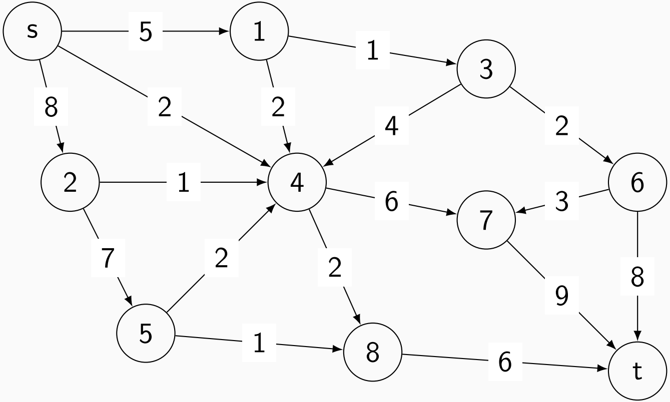
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 0$.



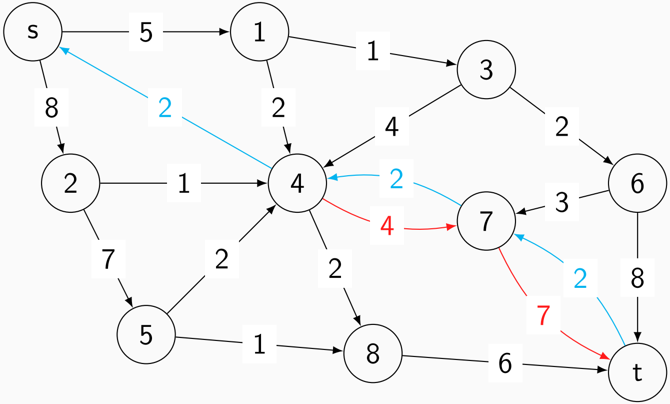
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 0$ ． 増加道 $(s, 4, 7, t)$ に 2 流す．



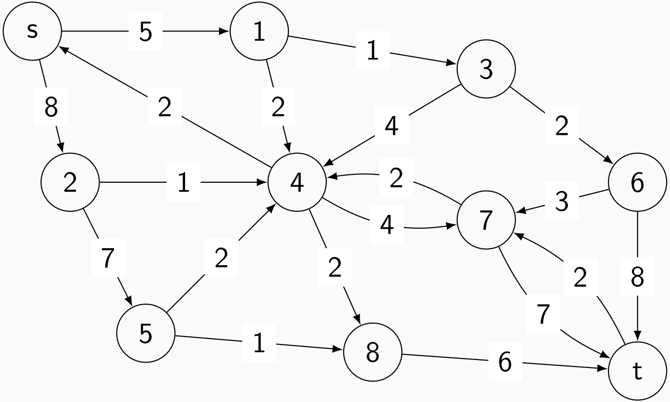
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 2$.



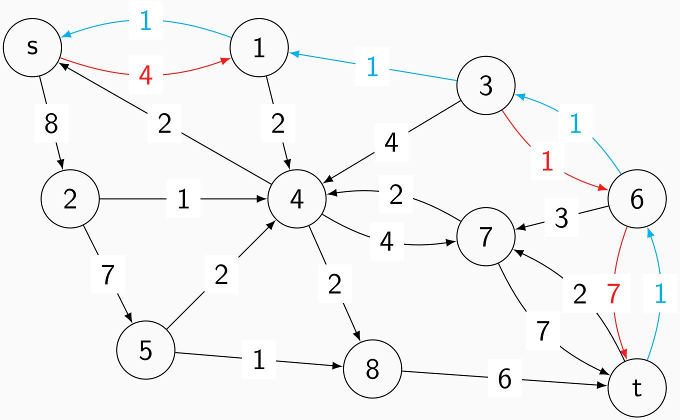
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 2$ ． 増加道 $(s, 1, 3, 6, t)$ に 1 流す．



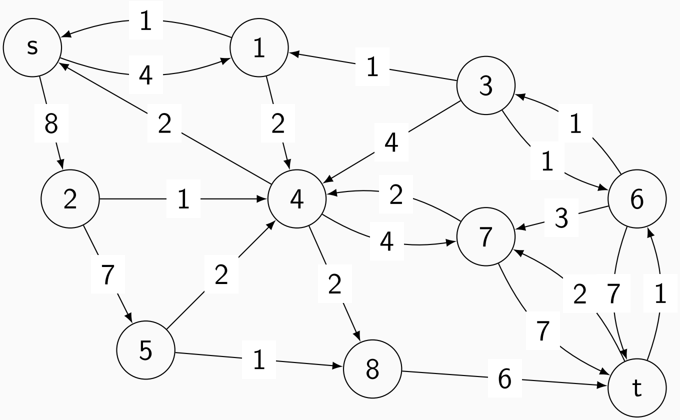
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 3$.



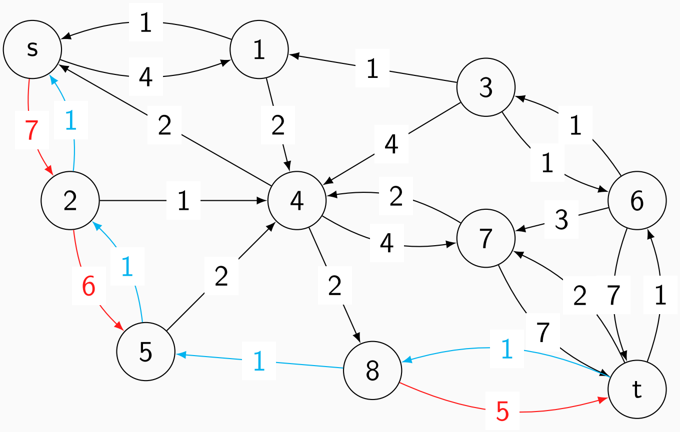
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 3$.　増加道 $(s, 2, 5, 8, t)$ に 1 流す.



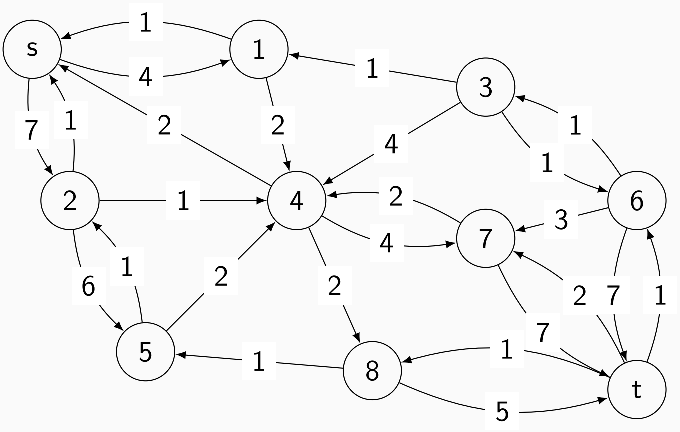
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 4$.



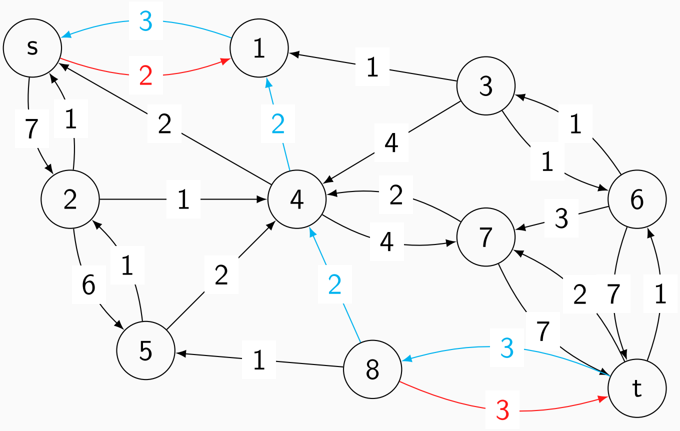
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 4$.　　増加道 $(s, 1, 4, 8, t)$ に 2 流す.



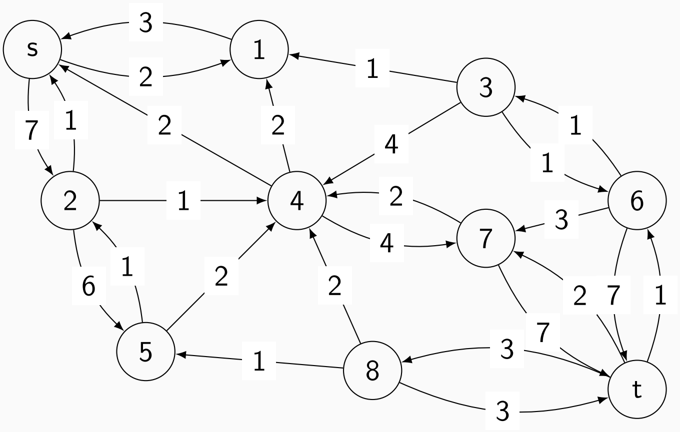
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 6$.



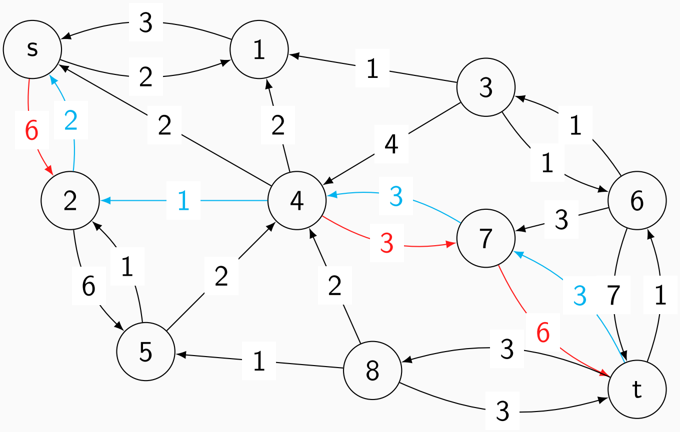
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 6$.　　増加道 $(s, 2, 4, 7, t)$ に 1 流す.



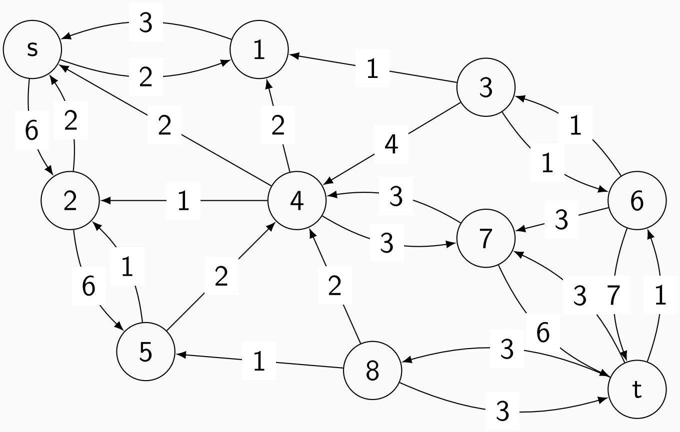
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 7$.



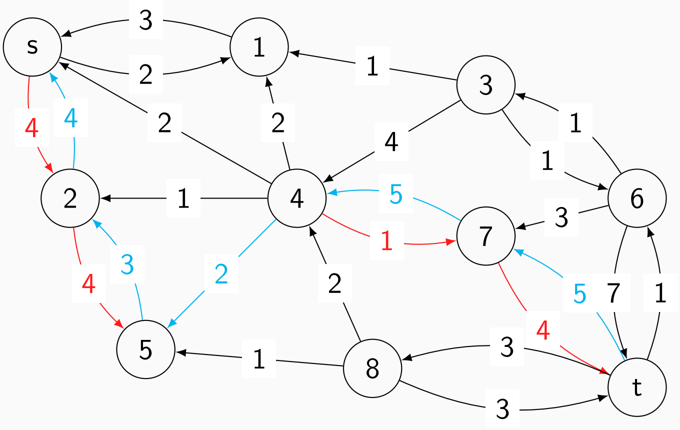
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 7$.　　増加道 $(s, 2, 5, 4, 7, t)$ に 2 流す.



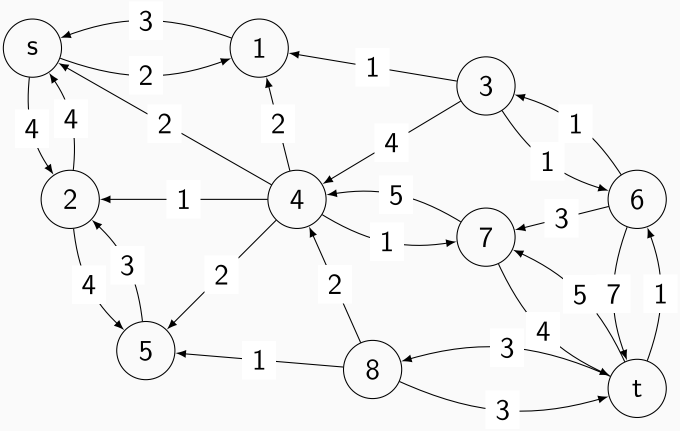
Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 9$.



Ford - Fulkerson 法

現在のフローの値: $\mathrm{val}(f) = 9$ ． 増加道が存在しない $\rightarrow$ 最大流の値は 9 である．



Ford - Fulkerson 法

Ford - Fulkerson 法によって求めたフロー f が最大流であることを示す．

命題 1(証明済)

ネットワーク D のフロー f とカット (S, S^c) が $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たすならば，f は D の最大流であり，(S, S^c) は D の最小カットである．

$\rightarrow \mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ となるようなカット (S, S^c) が存在することを示せばよい．

Ford - Fulkerson 法によって得られたフロー f は，残余ネットワーク D_f について $s - t$ パスが存在しない．

Ford - Fulkerson 法

ネットワーク D について，Ford - Fulkerson 法によって得られたフローを f とし，f に対する残余ネットワーク D_f について， $s-v$ パスが存在するような頂点 $v \in V$ の集合を S とする (すなわち， S は s から到達可能な頂点の集合)．

D_f には $s-t$ パスが存在しないので， (S, S^c) は $s-t$ カットである．

辺 $(u, v) \in (S, S^c)$ について:

- S の定義より $c_f((u,v)) = c((u,v)) - f((u,v)) = 0$ であるから，$f((u,v)) = c((u,v))$ ．

辺 $(u, v) \in (S^c, S)$ について:

- S の定義より $c_f((v,u)) = f((u,v)) = 0$ ．

Ford - Fulkerson 法

これより，

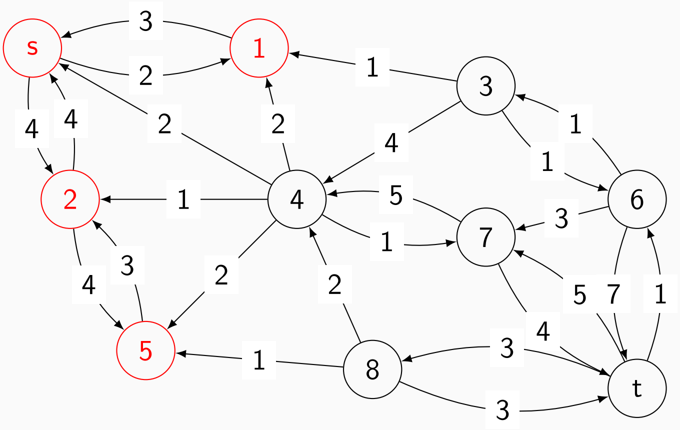
$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(f) &= (S \text{ から出る辺の流量総和}) - (S \text{ に入る辺の流量総和}) \\
&= \sum_{e \in (S, S^c)} f(e) - \sum_{e \in (S^c, S)} f(e) \\
&= \sum_{e \in (S, S^c)} c(e) - \sum_{e \in (S^c, S)} 0 \\
&= \mathrm{cap}((S, S^c))
\end{aligned}$$

よって，S を s から到達可能な頂点の集合とすると， $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たす．

したがって，Ford - Fulkerson 法によって得られたフロー f は最大流であり，$\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}((S, S^c))$ を満たすようなカット (S, S^c) が存在することから，最大流最小カット定理も示せた．

Ford - Fulkerson 法

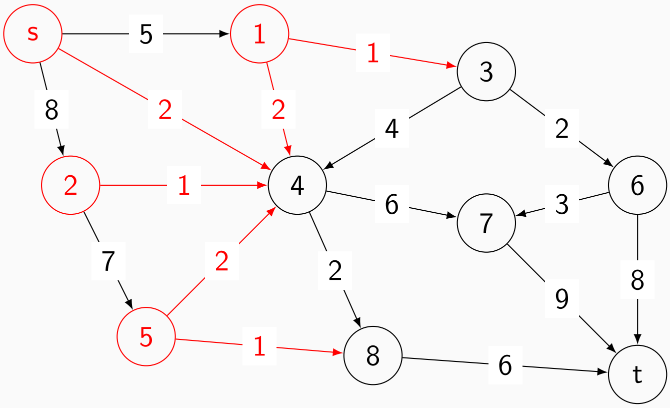
s から到達可能な頂点の集合は， $S = \{s, 1, 2, 5\}$ である．



Ford - Fulkerson 法

s から到達可能な頂点の集合は， $S = \{s, 1, 2, 5\}$ である．

最小カットは (S, S^c) であり， $\mathrm{cap}((S, S^c)) = 9$ である．



Ford - Fulkerson 法

辺の容量を実数としていたが，ここでは整数である，と仮定する．

整数性定理

すべての辺に流れるフローが整数の最大フローが存在し，その値は整数となる

証明のアイデア: Ford - Fulkerson 法で増加道を用いてフローを増やしたとき，増える値は必ず整数であることを用いればよい．

残余ネットワークについて， s から t への増加道は DFS を用いて $O(|E|)$ で見つけることができる．また，増加道に沿ってフローを増やしたとき，増加量は必ず 1 以上であるから，Ford - Fulkerson 法は $O(|E| \operatorname{val}(f))$ で実行できる．

(増加道を BFS で探すと $O(|V||E|^2)$ ，Edmonds - Karp 法)

Dinic 法

Dinic 法

DAG(有向非巡回グラフ)

閉路のない有向グラフのことを DAG という．ある頂点 v から出発し，頂点 v に戻ってくるようなパスが存在しないグラフである．

Dinic 法

暫定解であるフロー f を持ち，次の 2 つを増加道が存在する限り繰り返す．

1. G_f 上で s から t への最短経路 DAG $G_f^\star$ を求める．
2. $G_f^\star$ に増加道が存在する限り，次を繰り返す:
    - $G_f^\star$ 上で増加道を見つけ，そのパスに流せるだけ流す．
    - 残余容量が 0 になった辺，s からたどり着けない頂点，t へたどり着けない頂点，それらに隣接する辺を $G_f^\star$ から取り除く．

   その後，流したフローを f に反映する．

Dinic 法

Dinic 法によって得られるフロー f の残余ネットワーク G_f には，s から t への増加道が存在しないことから，Ford - Fulkerson 法と同様に Dinic 法によって得られるフローは最大流である．

命題 2

Dinic 法の計算量は， $O(|V|^2|E|)$ である．

ここで，最短経路 DAG とは...最短 $s-t$ パスに含まれる頂点/辺のみからなるグラフのことである．

Dinic 法

補題 3

Dinic 法の step 1, 2 の繰り返しは，高々 $|V|-1$ 回しか行われない．

あるタイミングについて，step 1 での s から v への最短経路 (存在しないなら ∞) を $\mathrm{label}(v)$ とする．

このとき， G_f 上 $s-t$ 最短経路 DAG $G_f^\star$ の任意の辺 (u,v) について $\mathrm{label}(u)+1=\mathrm{label}(v)$ が成り立つ．

step 2 で， $G_f^\star$ 上のフローを f に反映させるとき，

- G_f に追加されうる辺 (u,v) は， $G_f^\star$ の逆辺なので，$\mathrm{label}(u)=\mathrm{label}(v)+1$ となる辺のみである．
- $G_f^\star$ 上の任意の $s-t$ パスは，その少なくとも 1 辺が G_f から削除される．

の 2 つが成り立つ．

Dinic 法

step 2 終了後の G_f の任意の $s-t$ パスは，$\mathrm{label}(t)$ より長いことを示す．

更新後の G_f の $s-t$ パスについて，このパス上での label からなる列は，初項 0，末項 $\mathrm{label}(t)$ で，高々 1 ずつしか増加しない．これが長さ $\mathrm{label}(t)$ 以下になるためには，このパス上のすべての辺 (u,v) で $\mathrm{label}(u)+1=\mathrm{label}(v)$ を満たして，長さ $\mathrm{label}(t)$ になるしかない．

これより，step 1, 2 を行うことで，G_f の $s-t$ 最短経路は，真に長くなることがわかる．$s-t$ パスの長さは高々 $|V|-1$ なので，補題 3 が示せた．

Dinic 法

step 1 は，BFS をすることで $O(|E|)$ ．

$G_f^\star$ 上で増加道を見つけるには， s から出る辺を辿っていけばよいので， $O(|V|)$ ．
更新したときに残余容量が 0 になる辺が必ず 1 つ以上存在するので，更新は $O(|E|)$ ．これより，step 2 は $O(|V||E|)$ で完了する．

従って，step 1, 2 全体の計算量は $O(|V||E|)$ であり，これらは高々 $|V|-1$ 回しか行われないため，Dinic 法の計算量は $O(|V|^2|E|)$ である (命題 2 証明完了)．

例題

ABC010 D 浮気予防

浮気予防

高橋くんは SNS で友人関係にある人を辿り，見つけた女の子にメッセージを送ります．なぎさちゃんは，高橋くんのメッセージを女の子が見ることのないように，SNS に工作をします．行える工作は以下の 2 つです:

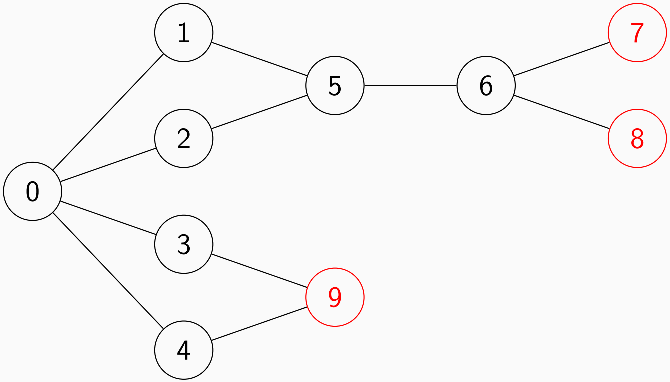
- 特定の 2 人の友人関係を解消する．
- 高橋くん以外の特定の 1 人のパスワードを変え，ログインできなくする．

なぎさちゃんは，できるだけ工作の回数を少なくし，全員の女の子が高橋くんのメッセージを閲覧できないようにします．なぎさちゃんが工作をする必要のある回数は何回ですか？

- 制約: $1 \leq \text{SNS の登録人数} \leq 100$

ABC010 D 浮気予防

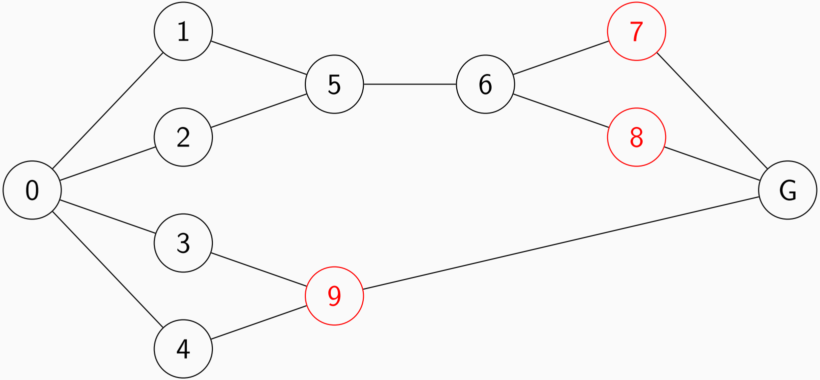
頂点を人，辺を友人関係とし，0 を高橋くん，赤い頂点を女の子とする．



ABC010 D 浮気予防

頂点を人，辺を友人関係とし，0 を高橋くん，赤い頂点を女の子とする．

さらに新たな頂点 G を追加し女の子から G への辺を張ったネットワークを考える．
(各辺の容量は 1 とする．)



ABC010 D 浮気予防

女の子 i が高橋くんのメッセージを見ることができないとき，少なくとも

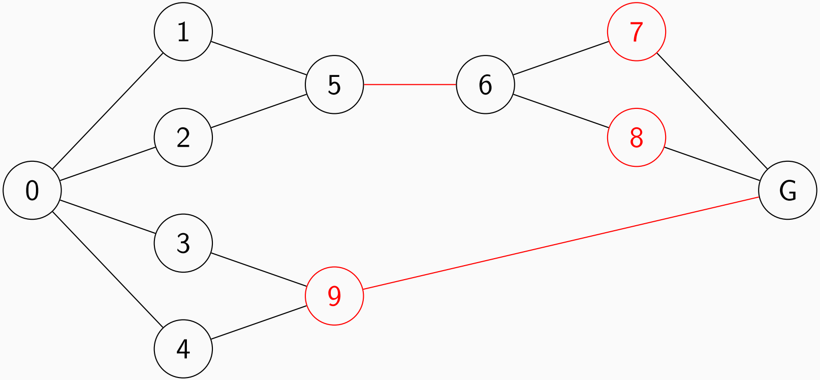
- 高橋くんと女の子 i が連結でない．
- 女の子 i のパスワードが変えられていて，ログインできなくなっている．

のどちらか一方は成り立つ．先ほど考えたグラフについて，

- 「特定の 2 人の友人関係を解消する」:
  $\rightarrow$ 友人関係の辺を削除する．
- 「 1 人のパスワードを変え，ログインできなくする」:
  $\rightarrow$ 女の子 i から G への辺を削除する．

という操作の置き換えをすると，最小 $0-G$ カットを求める問題に帰着できる！

ABC010 D 浮気予防



この 2 辺を削除すると，0 から G へのパスは存在しなくなる．これ以下の辺の本数の削除で 0 から G へのパスが存在しなくなることはないので，答えは 2 ．

これは，「5 と 6 の友人関係を解消する」「9 のパスワードを変える」に対応．

おわりに

おわりに

最大流最小カット定理を証明し，Ford - Fulkerson 法と Dinic 法を紹介した．

この考え方をさらに発展させることで，競技プログラミングで「燃やす埋める」と呼ばれる問題を解くことができる．

今後の発展として，燃やす埋める問題について理解し，解くことを目標としたい．

参考文献

- 早稲田大学 早水桃子研究室
  - “離散数学入門#8: 最大流問題 (1)：フローネットワークの基礎知識”
    https://www.youtube.com/watch?v=QTNCb-d4_80&list=PLCo60G1m_ibpJgfB4WcGwWybC6sfyawoL&index=10
  - “離散数学入門#9: 最大流問題 (2)：増加道アルゴリズムと最大流最小カット定理”
    https://www.youtube.com/watch?v=TjOA3vKOHCI&list=PLCo60G1m_ibpJgfB4WcGwWybC6sfyawoL&index=11
- Dinic 法とそのとき間計算量
  https://misawa.github.io/others/flow/dinic_time_complexity.html