次元の違うユークリッド空間は同相でない

トポロジーの手法の紹介

BV22321 木村敏樹

数理科学研究会

November 5, 2023

準備

Definition 1 (ユークリッド空間)

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とかく．整数 $N \geq 0$ について直積 $\mathbb{R}^N = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{N}$ にユークリッドノルムによって位相を入れたものをユークリッド空間という．また，この N をユークリッド空間の次元という．

Definition 2 (ユークリッドノルム)

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．ユークリッドノルムとは次の式により定義される値のことである:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=0}^{N} {x_i}^2}, \quad x = (x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

準備

Proposition 3

ユークリッドノルムは次の 4 条件をみたす:

1. ${}^\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, \|x\| \geqq 0,$
2. ${}^\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, \|x\| = 0 \iff x = 0,$
3. ${}^\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, {}^\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$
4. ${}^\forall x, {}^\forall y \in \mathbb{R}^{N+1}, \|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|.$

位相空間

Definition 4 (位相空間)

X を空でない集合とする．次の 3 条件を満足する X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ を与えた集合 X を位相空間といい，$(X, \mathcal{O})$ と表す:

1. $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$,
2. $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathcal{O}$,
3. $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}$ とすれば $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

また，$\mathcal{O}$ を位相といい，$\mathcal{O}$ に属する X の部分集合を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開集合という．

連続写像

Definition 5 (連続写像)

X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続であるとは，位相空間 Y の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ が X の開集合となることである．ここで，$f^{-1}(O) = \{x \in X; f(x) \in O\}$ は O の逆像である．

上で定義した連続性は $\varepsilon - \delta$ 論法で記述される定義と同値である:

$$^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

同相写像

Definition 6 (同相写像)

位相空間 X と Y についての連続写像 $f: X \to Y$ が同相写像であるとは，連続な逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ をもつこと，すなわち

1. f は全単射，
2. f は連続，
3. 逆射像 f^{-1} も連続，

であるときにいう．

位相空間の同相

Definition 7 (同相)

位相空間 X と Y が同相であるとは，同相写像 $f : X \to Y$ が存在するときにいい，

$$X \approx Y$$

と表す．

位相空間が同相であるとはつまり，ある位相空間に同相な位相空間は，その位相空間の持つ位相的性質のみをもつということである．

弧状連結

Definition 8 (弧状連結)

空でない位相空間 X が弧状連結であるとは，任意の 2 点 $x_0, x_1 \in X$ について x_0 を x_1 につなぐ連続写像が存在するときにいう：

$$^\forall x_0 \in X, {}^\forall x_1 \in X, {}^\exists l \in [0,1] \to X \quad \text{s.t.} \quad l(0) = x_0, l(1) = x_1.$$

ユークリッド空間の弧状連結

Lemma 9

任意の正の整数 $N > 0$ についてユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ は弧状連結である．

Proof.

任意の 2 点 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N$ について連続写像 $l : [0,1] \to \mathbb{R}^N, t \mapsto l(t) := (1-t)x_0 + tx_1$，は $\mathbb{R}^N$ 内で x_0 を x_1 につなぐ路になる．したがって，任意の 2 点をつなぐ連続写像が存在したので，$\mathbb{R}^N$ は弧状連結である． □

Fact 10

位相空間 Y が弧状連結な位相空間 X に同相ならば，Y も弧状連結である．

ユークリッド空間の弧状連結

Lemma 11

平面から原点 0 を除いた空間 $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ は弧状連結である．

Proof.

任意の 2 点 $p_0, p_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ について p_0 を p_1 につなぐ $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 内の路を構成すればよい．極座標によって

$$p_0 = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0), p_1 = (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1), r_0, r_1 > 0, 0 \leq \theta_0, \theta_1 < 2\pi$$

と表す．このとき連続写像 $l : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ を

$$l(t) := (r_t \cos\theta_t, r_t \sin\theta_t), r_t := (1-t)r_0 + tr_1, \theta_t := (1-t)\theta_0 + t\theta_1, (0 \leq t \leq 1)$$

で定義すると，

ユークリッド空間の弧状連結

Proof.

$$l(0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0) = p_0, l(1) = (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1) = p_1$$

であるから，l は p_0 を p_1 につなぐ $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 内の路である．したがって，$\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ は弧状連結であることが示された． □

直線と平面は同相でない

Lemma 12

$c \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}\backslash\{c\}$ は弧状連結でない．

Proof.

$a, b \in \mathbb{R}\backslash\{c\}$ を $a < c < b$ となるようにとると，中間値の定理により，a と b をつなぐ $\mathbb{R}$ 内の路 $l : [0,1] \to \mathbb{R}$ は必ず c を通る．つまり，a と b をつなぐ $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ 内の路は存在しない．したがって，$\mathbb{R}\backslash\{c\}$ は弧状連結でないことが示された． □

Therorem 13

直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ は同相でない:$\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^2$.

Proof.

背理法により示す．$\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$ とし，同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在したと仮定する．このとき，原点 $0 \in \mathbb{R}^2$ について，同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \backslash \{f(0)\}$ が得られる．**Lemma. 11** により $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ は弧状連結であり，また f は同相写像であるから **Lemma. 10** により $\mathbb{R} \backslash \{f(0)\}$ も弧状連結であることが分かる．しかし，これは **Lemma. 12** で得た事実に反する．これは矛盾である．したがって，仮定を否定することにより $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^2$ が得られる． □

球面から1点もしくは2点取り除いた場合の同相

Lemma 14

S^n を n 次元球面，$P := (0,\ldots,0,1), Q := (0,\ldots,0,-1) \in S^n$ とおき，S^n の開被覆 $\{U,V\}$ を

$$U := S^n \backslash \{Q\}, \quad V := S^n \backslash \{P\}$$

とする．このとき次の同相が成り立つ．

1. $U \approx V \approx \mathbb{R}^n$.
2. $U \cap V \approx \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Proof.

それぞれについて，同相写像を構成すればよい．今回は立体射影を用いて連続な逆写像をもつような写像を構成する．

Proof.

1. U 上の任意の点 x と Q を結ぶような直線と $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ との交点を $(f(x), 0)$ とおく．これを具体的に書くと

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{(x_0, \ldots, x_{n-1})}{1 + x_n}$$

と表されるから，$f : U \to \mathbb{R}^n$ は連続である．この写像の逆写像 $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to U$ も

$$f^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{(2y_1, \ldots, 2y_n, 1 - \|y\|)}{1 + \|y\|^2}, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

となるから，連続である．ここで，$\|y\|$ はユークリッドノルムである．ゆえに同相 $U \approx \mathbb{R}^n$ が得られる．V についても同様にして同相 $V \approx \mathbb{R}^n$ が得られる．

□

Proof.

2. 上と同様に $U \cap V$ に制限することによって同相 $U \cap V \approx \mathbb{R} \backslash \{0\}$ が得られる.

$\square$

第 q ホモロジー群

Definition 15 (第 q ホモロジー群)

非負整数 $q \geq 0$ と位相空間 X に対して，空間 X の第 q ホモロジー群とよばれる加群 $H_q(X)$ が対応し，位相空間 X と位相空間 Y との間の連続写像 $f : X \to Y$ に対して f の誘導準同型とよばれる準同型写像

$$f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$$

が対応する．

ホモトピック

Definition 16 (ホモトピック)

連続写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ がホモトピックであるとは，すべての $x \in X$ について

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

をみたす連増写像 $F : X \times [0, 1] \to Y$ が存在することをいう．このことを記号で次のように表す:

$$f \simeq g : X \to Y.$$

ホモトピー同値

Definition 17 (ホモトピー同値写像，ホモトピー逆)

連続写像 $f : X \to Y$ がホモトピー同値写像であるとは，連続写像 $g : Y \to X$ が存在して

$$g \circ f \simeq 1_X : X \to X, \quad f \circ g \simeq 1_Y : Y \to Y$$

が成り立つことをいう．このとき，g を f のホモトピー逆とよぶ．

球面から 2 点取り除いた空間のホモトピー同値

Lemma 18

次のホモトピー同値が成り立つ．

$$U \cap V \simeq S^{n-1}.$$

Proof.

Lemma. 14 により $U \cap V \approx \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ が成り立つから，ホモトピー同値 $\mathbb{R} \backslash \{0\} \simeq S^{n-1}$ を示せばよい．包含写像 $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R} \backslash \{0\}$ および連続写像 $r : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to S^{n-1}, x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$ が互いにホモトピー逆であることを示す．いま，明らかに $r \circ i = 1_{S^{n-1}}$ である．さらに連続写像

$$\Phi : (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \times [0, 1] \to \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad (x, t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|} \right) x$$

Proof.

は，任意の $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ について

$$\Phi(x,0) = i \circ r(x), \quad \Phi(x,1) = 1_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}(x)$$

をみたす．ゆえに

$$i \circ r \simeq 1_{R^n\backslash\{0\}},$$

つまり r と i は互いにホモトピー逆である．したがってホモトピー Φ の存在が示せたので，写像 r, i はホモトピー同値写像となり，$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, S^{n-1}$ はホモトピー同値である:

$$\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \simeq S^{n-1},$$

すなわち $U \cap V \simeq S^{n-1}$ が示された． □

球面のホモロジー群

次の事実を証明なしに認めることにする.

Fact 19

$n \geqq 1$ について

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0 \text{ or } n), \\ \{0\} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

目標の定理の証明

Therorem 20

次元の異なるユークリッド空間は位相空間として同相でない:

$$n \neq m \Rightarrow \mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m.$$

Proof.

今，$n \neq m$ であるから，$n > m$ として一般性を失わない．背理法により示す．$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$ とし，同相写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が存在したと仮定する．同相写像であるから逆写像が存在し，それを $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ とする．このとき原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ について，同相写像 $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\}$ および $f^{-1} : \mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ が得られる．第 $n-1$ ホモロジー群に移行する．すると上の二つの写像は以下の準同型写像を誘導する:

Proof.

$$f_* : H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\})$$
$$(f^{-1})_* : H_{n-1}(\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$$

ここで，合成写像

$$(f^{-1})_* \circ f_* : H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$$

は恒等写像である．また，**Lemma. 18** により $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \simeq S^{n-1}$ および $\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\} \simeq S^{m-1}$ が成り立つから，**Fact. 19** により $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \neq 0$ であり，$n > m$ とあわせて $H_{n-1}(\mathbb{R}^m \backslash \{f(0)\}) = 0$ である．これは合成写像 $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to 0 \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ が $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \neq 0$ の恒等写像であることになるが，これは矛盾である．したがって，仮定を否定することにより $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m$ が得られる． □

- 河澄響矢「トポロジーの基礎」(東京大学出版会),2022 年
- 内田伏一「集合と位相」(裳華房),1986 年
- 松本幸夫「トポロジー入門」(岩波書店),1985 年
- 服部昌夫「位相幾何学」(岩波書店),1979 年