米田の補題とその応用について

山下泰平

芝浦工業大学　数理科学研究会

2023 年 11 月 3 日

目次

1. 研究背景
2. 圏論の基本知識
   - 圏
   - 関手
   - 自然変換
   - 関手の充満性・忠実性
3. 米田の補題とその応用
   - 米田の補題
   - 米田埋め込み
   - Cayley の定理
4. 今後の課題

1. 研究背景
2. 圏論の基本知識
3. 米田の補題とその応用
4. 今後の課題

研究背景

1940 年代に Samuel Eilenberg と Saunders Mac Lane によって確立された圏論は，非常に抽象的な数学理論であり，その抽象性から数学の基盤を形成する理論とされている．近年，圏論はその抽象性ゆえ，数学に限らず自然科学から社会科学まで幅広い分野に応用され，その重要性が増している．したがって，研究の動機としては圏論を学ぶことで，今後の研究範囲が大いに広がる可能性を感じたためである．

1. 研究背景
2. 圏論の基本知識
3. 米田の補題とその応用
4. 今後の課題

圏

定義 1 (圏)

圏（category）は

- 対象（object）$X, Y, Z, \ldots$ のあつまり
- 射（morphism）$f, g, h, \ldots$ のあつまり

からなり，これらは次を満たす．

- 各射は始域（domain）と終域（codomain）の対象をもち，$f\colon X \to Y$ は始域が X，終域が Y である射を表す．
- 各対象に対して，恒等射（identity morphism）$1_X\colon X \to X$ がある．
- 射 f の終域が射 g の始域に等しい各射の組 f, g に対して，f の始域に等しく，g の終域に等しい合成射（composite morphism）gf がある．つまり，

$$f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z \quad \rightsquigarrow \quad gf\colon X \to Z.$$

定義 1 の続き

さらに，この条件は以下の公理に従う.

- 各 $f\colon X \to Y$ に対して，$1_Y f = f 1_X = f$.
- 合成可能な 3 つの射の組 f, g, h に対して，$h(gf) = (hg)f$.

圏とは手短にいうと，対象と射からなり，合成射が定義でき，その合成は合成の順によらないものである！

例 2

群 G（より一般にモノイド）は一つの対象 c からなる圏 $\mathbf{B}G$ を定義する．圏 $\mathbf{B}G$ で群 G の元は $\mathbf{B}G$ の射であり，各群の元は c から c への射を表し，合成射は群 G の元の積によって得られ，G の単位元 e は恒等射として振舞う．

関手

定義 3 (関手)

圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ の関手（functor）とは次のものからなる．

- $\mathscr{C}$ の各対象 c に対する $\mathscr{D}$ の対象 Fc．
- 各射 $f\colon c \to c'$ に対する射 $Ff\colon Fc \to Fc'$．

さらに次の関手性公理（functoriality axioms）を満たす．

- $\mathscr{C}$ で合成可能な各組 f, g に対して，$Fg \cdot Ff = F(g \cdot f)$．
- $\mathscr{C}$ の各対象 c に対して，$F(1_c) = 1_{Fc}$．

関手の定義を見直してみると，もとの圏の始域と終域，合成，恒等性を関手で移した先の圏で保っていることがわかる．つまり，関手はもとの圏の構造を保つような対象間の射と射の間の射からなると言える．

関手の定義を図にすると次のようになる.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "F"] & & \mathscr{D} \\ c \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, mapsto] & & Fc \arrow[d, "Ff"] \\ {} \arrow[rr, mapsto, phantom] & & {} \\ c' \arrow[rr, mapsto] & & Fc' \end{tikzcd}$$

例 4

$\mathscr{C}(c,-)\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ および $\mathscr{C}(-,c)\colon \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Set}$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{C} & \xrightarrow{\mathscr{C}(c,-)} & \mathbf{Set} \\
x & \longmapsto & \mathscr{C}(c,x) \\
f\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow f_* \\
y & \longmapsto & \mathscr{C}(c,y)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathscr{C}^{op} & \xrightarrow{\mathscr{C}(-,c)} & \mathbf{Set} \\
x & \longmapsto & \mathscr{C}(x,c) \\
f\big\downarrow & \longmapsto & \big\uparrow f^* \\
y & \longmapsto & \mathscr{C}(y,c)
\end{array}
$$

は関手であり，$\mathscr{C}$ の対象 c によって表現された関手（functor represented by c）という．

例 5

G を群とする．$\mathbf{BG}$ の唯一の対象を $\mathscr{C}$ の対象 X に送り，$\mathbf{BG}$ の射 g，つまり群 G の元 g を自己射 $g_*\colon X \to X$ に送る $X\colon \mathbf{BG} \to \mathscr{C}$ は関手であり，対象 X 上での群 G の左作用を定める．双対的に，$X\colon \mathbf{BG}^{op} \to \mathscr{C}$ は関手であり，$\mathscr{C}$ の対象 X 上の群 G の右作用を定める．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{BG} \arrow[rr, "X"] & & \mathscr{C} \\
c \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, mapsto] & & X \arrow[d, "g_*"] \\
c \arrow[rr, mapsto] & & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{BG}^{op} \arrow[rr, "X"] & & \mathscr{C} \\
c \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, mapsto] & & X \\
c \arrow[rr, mapsto] & & X \arrow[u, "g^*"']
\end{tikzcd}
$$

自然変換

定義 6 (自然変換)

圏 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ と関手 $F, G\colon \mathscr{C} \rightrightarrows \mathscr{D}$ を与えたとき，自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ は次のものからなる．

- $\mathscr{C}$ の各対象 c に対する $\mathscr{D}$ の射 $\alpha_c\colon Fc \to Gc$ で，α_c の集まりは自然変換の成分（component）を定め，$\mathscr{C}$ の射 $f\colon c \to c'$ に対する $\mathscr{D}$ の射の四角図

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{\alpha_c} & Gc \\ {\scriptstyle Ff}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle Gf} \\ Fc' & \xrightarrow[\alpha_{c'}]{} & Gc' \end{array}$$

  が可換になる．

自然同型（natural isomorphism）はすべての成分 α_c が同型である自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ のことである．

自然変換は簡単にいうと，関手の間の射ということになる.（厳密には関手圏 $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ の射）

例 7

関手 $X, Y\colon \mathbf{BG} \rightrightarrows \mathscr{C}$ の間の自然変換について考える．$\alpha\colon X \Rightarrow Y$ とすると，$\mathbf{BG}$ はひとつしか対象をもたないから α は $\mathscr{C}$ の射 $\alpha\colon X \to Y$ で構成される．よって，各 $g \in G$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g_*"'] & Y \arrow[d, "g_*"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

が可換になるものである．この $\alpha\colon X \to Y$ を G-同変（G-equivariant）という．

命題 8

群 G の単位元を e とする．関手 $G, X\colon \mathbf{BG} \to \mathbf{Set}$ に対して，自然変換すなわち G-同変写像 $\phi\colon G \Rightarrow X$ が定義できる．

証明.

自然変換 $\phi\colon G \Rightarrow X$ は例 7 より，G-同変写像 $\phi\colon G \to X$ である．ϕ を定義するには，任意の $g \in G$ に対して $\phi(g) \in X$ でなければならない．ここで，ϕ の自然性から，$\phi(g \cdot h) = g \cdot \phi(h)$ であることが要求される．よって，G の単位元 e を h に代入すれば，$\phi(g) = g \cdot \phi(e)$ である．ゆえに，$\phi(g) \in X$ になるには，$\phi(e) \in X$ となるように $\phi(e)$ を選択すれば良い．さらに，G 上の群 G の左作用は自由であるから，異なる G の元 k, h に対して $g = k \cdot e = h \cdot e$ となる単位元 e が存在しない．すなわち，異なる元に対して ϕ は同じ結果を返さないため，$\phi(e) \in X$ は任意に選択できる．したがって，ϕ は定義できる． $\square$

関手の充満性・忠実性

定義 9 (充満・忠実)

$\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ が局所小圏であるとする．このとき，関手 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ が

- 充満（full）とは，$\mathscr{C}$ の各 x, y に対して，射 $\mathscr{C}(x, y) \to \mathscr{D}(Fx, Fy)$ が全射であることをいう．
- 忠実（faithful）とは，$\mathscr{C}$ の各 x, y に対して，射 $\mathscr{C}(x, y) \to \mathscr{D}(Fx, Fy)$ が単射であることをいう．

1 研究背景

2 圏論の基本知識

3 米田の補題とその応用

4 今後の課題

米田の補題

定理 10 (米田の補題)

$\mathscr{C}$ を局所小圏とし，各関手 $F\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ と $\mathscr{C}$ の各対象 c に対して，自然変換 $\alpha\colon \mathscr{C}(c,-) \Rightarrow F$ を $\alpha_c(1_c) \in Fc$ に対応させるような全単射

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{C}(c,-), F) \cong Fc$$

が存在する．さらに，この対応は c と F で自然である．

米田の補題は，自然変換 $\alpha\colon \mathscr{C}(c,-) \Rightarrow F$ と $\alpha_c(1_c) \in Fc$ が一対一対応していることを主張している！別の言い方をすれば，Fc の２つの元に対応する $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}(c,-), F)$ の元は異なり，逆も然りということである．

証明の概要．

$\Phi\colon \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(c,-),F) \to Fc$ を

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(c,-),F) \to Fc \qquad \Phi(\alpha) = \alpha_c(1_c)$$

と定義する．この写像 Φ が定義できることは容易に確かめられる．次に，その逆写像で $x \in Fc$ を $\Psi(x)\colon \mathscr{C} \Rightarrow F$ に移す $\Psi\colon Fc \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(c,-),F)$ を定義する．そのために，まずは $f\colon c \to d$ に対して $\Psi(x)$ が自然性を満たすように定義する．つまり，$f\colon c \to d$ に対する図式

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(c,c) \arrow[r, "\Psi(x)_c"] \arrow[d, "f_*"'] & Fc \arrow[d, "Ff"] \\
\mathscr{C}(c,d) \arrow[r, "\Psi(x)_d"'] & Fd
\end{tikzcd}$$

続き

が $\mathscr{C}$ で可換になるように定義する．この可換性を手がかりにして，Ψ の像
$\Psi(x)\colon \mathscr{C}(c,-) \Rightarrow F$ が自然変換であることを示し，写像 Ψ が定義できているかを確認する．
そして，$\Phi\Psi(x) = x$，$\Psi\Phi(\alpha) = \alpha$ となっているか計算し，Φ が全単射であるかを確かめる．
なお，F と c の自然性に関しては資料を参照されたい．

米田埋め込み

米田の補題から即座に導かれる系として米田埋め込み (Yoneda embedding) がある．

Corollary 11

$\mathscr{C}$ は局所小圏とする．このとき，関手

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, hook, "y"] & & \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{op}} \\
c \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, mapsto] & & \mathscr{C}(-,c) \arrow[d, "f_*"] \\
d \arrow[rr, mapsto] & & \mathscr{C}(-,d)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{C}^{op} \arrow[rr, hook, "y"] & & \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \\
c \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, mapsto] & & \mathscr{C}(c,-) \\
d \arrow[rr, mapsto] & & \mathscr{C}(d,-) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}
$$

は充満で忠実な埋め込みを定義する．

米田埋め込みは $\mathscr{C}$ の射 $f\colon c \to d$ と自然変換 $f_*\colon \mathscr{C}(-,c) \Rightarrow \mathscr{C}(-,d)$ および $f^*\colon \mathscr{C}(d,-) \Rightarrow \mathscr{C}(c,-)$ が一対一対応していることを主張している！

証明.

米田の補題より，全単射

$$\Phi\colon \mathscr{C}(c,d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(-,c),\mathscr{C}(-,d)) \tag{1}$$

$$\Phi\colon \mathscr{C}(c,d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(d,-),\mathscr{C}(c,-)) \tag{2}$$

がある．このとき，異なる射 $c \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} d$ は異なる自然変換 f_*, g_* および f^*, g^* を誘導するから，関手 y は忠実である．次に関手 y が充満であることを示す．また，自然変換 $\alpha\colon \mathscr{C}(-,c) \Rightarrow \mathscr{C}(-,d)$ および $\alpha\colon \mathscr{C}(d,-) \Rightarrow \mathscr{C}(c,-)$ は (1)，(2) より $\mathscr{C}(c,d)$ および $\mathscr{C}(d,c)$ の元と対応する．つまり，$\alpha_c(1_c) = f \in \mathscr{C}(c,d)$ および $\alpha_d(1_d) = f \in \mathscr{C}(c,d)$ である．

続き

一方，f_*, f^* は

$$f_{*c}(1_c) = f1_c = f \tag{3}$$
$$f^*{}_d(1_d) = 1_d f = f \tag{4}$$

であるから，$\Phi(\alpha) = \Phi(f_*)$ および $\Phi(\alpha) = \Phi(f^*)$ で $\alpha = f_*$ および $\alpha = f^*$ である．よって，関手 y は充満である． したがって，関手 y は充満で忠実な埋め込みを定義する． □

Cayley の定理

圏論ではない米田の補題の応用として Cayley の定理がある．

Corollary 12 (Cayley の定理)

任意の群 G は対称群[1] $\mathrm{Sym}(G)$ の部分群と同型である．

[1] 群 G に対する対称群 $\mathrm{Sym}(G)$ は自己同型 $f\colon G \to G$ がなす群のことである．

この定理は任意の群 G の構造は本質的には対称群の部分群とある意味で同じであるということを主張している！

証明.

群 G を対象がひとつの圏 $\mathbf{B}G$ とみなす．このとき，例より共変米田埋め込み $\mathbf{B}G \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{B}G^{op}}$ は $\mathbf{B}G$ の対象 G を右 G-集合 G を定める関手 G に送る．系 11 より，右 G-集合 G の G-同変自己射は G の固定元 g の左乗法で定義される写像である．さらに，G の元 g は圏 $\mathbf{B}G$ で自己同型射であるから，各 G の G-同変自己射は自己同型射である．したがって，米田埋め込みによって群 G の元と関手 G の間の自然変換の一対一対応がある．ここで忠実な忘却関手 $U\colon \mathbf{Set}^{\mathbf{B}G^{op}} \to \mathbf{Set}$ を米田埋め込みに合成することで，群 G と集合 G の自己同型群 $\mathrm{Sym}(G)$ の部分群の間の同型を得る． □

この証明を図にすると…

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{BG} \arrow[r, hook, "y"] & \mathbf{Set}^{\mathbf{BG}^{op}} \arrow[r, "U"] & \mathbf{Set} \\
c \arrow[d, "g"'] \arrow[r, mapsto] & G \arrow[d, "g_*"] \arrow[r, mapsto] & G \arrow[d, "Ug_*=g"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & {} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & {} \\
c \arrow[r, mapsto] & G \arrow[r, mapsto] & G
\end{tikzcd}
$$

1. 研究背景
2. 圏論の基本知識
3. 米田の補題とその応用
4. 今後の課題

今後の課題

今回の研究では米田の補題という圏論のひとつの到達点までまとめることができた．今後，圏論の基本的な道具である極限や随伴について学習し，Kan 拡張についてまとめたいと思う．また，代数的整数論における圏論の活用例についても調べていきたい．

[1] Emily Riehl, *Category Theory in Context*. Cambridge University Press, 2014.

[2] Tom Leinster. *Basic category theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2014.