2024 年度 芝浦祭 懸賞問題 解答

数理科学研究会

解答

問題 1: 2104

問題 2: 25 枚

問題 3: 10 倍

問題 4:

(1) $|25| = 23, \quad |34| = 19$

(2) $|625| = 103, \quad |142| = 43$

(3) $|m^2| = 4m + 3, \quad |(n+2)^2 - 2| = 4n + 3$

問題 5:

(1) 3 (2) 先手必勝

問題 6: 55 通り

解説

問題 1 (★☆☆)

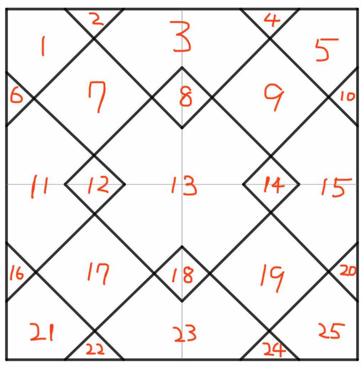
この問題の条件を整理すると，以下のようになります.

- 2024 よりも大きい数字
- 4 の倍数（下二桁が 4 の倍数であることが必要）
- 逆から読んでも 4 の倍数（上二桁を逆から読んだときにも 4 の倍数であることが必要）
- 0 で終わらない（一の位が 0 であるものは不適）

上二桁が 20 だと逆から読んだときに，4 の倍数にならないため不適です.
これらの条件を満たす最小の数を求めるために，2100 以上の 4 の倍数を順に確認していくと，2104 が条件を満たす最小の数であることが分かります.

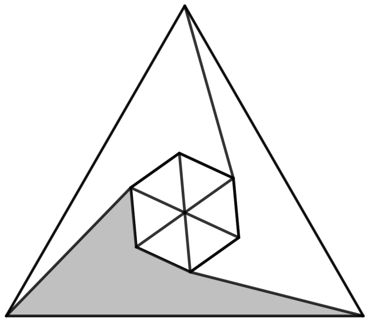
問題 2 (★☆☆)

太線に沿って切断し，元の形に広げると，図のようになります.



このことから，紙は 25 枚に分割できることが分かります.

問題 3 (★★☆)



上図のように，元の図形を 3 つ組み合わせると大きな正三角形が出来上がることが分かります.
全体の正三角形の面積を A，中にある小さい正三角形の面積を B，色のついた部分の面積を C とすると，以下のような関係が成り立つ.

$$C = \frac{A - 6B}{3} \tag{1}$$

全体の正三角形と小さい正三角形の長さの比は $6 : 1$ なので，$A : B = 36 : 1$ になります.
式 (1) の両辺を B で割り，また $\dfrac{A}{B} = 36$ であるので，次のように計算できます.

$$\frac{C}{B} = \frac{A - 6B}{3B} = \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{B} - 2 = 12 - 2 = 10$$

従って，色のついた部分は小さい正三角形の 10 倍になります.

また A, B, C を次のように計算して求めることも出来ます.
A は, 一辺が 6 の正三角形の面積なので, 次のように計算されます.

$$A = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$$

同様に B は, 一辺が 1 の正三角形の面積なので, 次のように計算されます.

$$B = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

従って色のついた部分の面積 C は，次のようになります.

$$C = \frac{1}{3}\left(9\sqrt{3} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2}\sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

よって, C と B の値により次のように計算されます.

$$\frac{C}{B} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{4} = 10$$

従って，色のついた部分は小さい正三角形の 10 倍になります.

問題 4 (★★☆)

(1) 図を見ると 25 の周辺は

25	48
24	47

となっています.

従って $|25|$ を定義通りに計算すると以下のようになります.

$$|25| = 25 \times 47 - 48 \times 24 = 1175 - 1152 = 23$$

また 34 の周辺は

34	15
35	16

となっています.

従って $|34|$ を定義通りに計算すると以下のようになります.

$$|34| = 34 \times 16 - 15 \times 35 = 544 - 525 = 19$$

(2) 図から $1, 9, 25, 49$ のように奇数の平方数になっている数は斜めに配置されていることが分かります．ここで $625 = 25^2$ であることから 625 も同様に配置されており，その周辺は次のようになっていると考えられます.

731	730	729	840
626	625	728	839
529	624	727	838
528	623	726	837

従って $|625|$ を定義通りに計算すると以下のようになります.

$$|625| = 625 \times 727 - 728 \times 624 = 454375 - 454272 = 103$$

また図より $4, 16, 36$ のように偶数の平方数となっている数も斜めに配置されています.
ここで 142 は 12 の平方数である 144 と近い値になっており，その周辺は次のようになっていると考えられます.

192	141	98	63
193	142	99	64
194	143	100	65
195	144	101	102

従って $|142|$ を定義通りに計算すると以下のようになります.

$$|142| = 142 \times 100 - 99 \times 143 = 14200 - 14157 = 43$$

(3) (1),(2) より m^2 の周辺は次のようになっていると証明できます.

$(m+2)^2+2$	$(m+2)^2+1$	$(m+2)^2$
m^2+1	m^2	$(m+2)^2-1$
$(m-2)^2$	m^2-1	$(m+2)^2-2$

従って $\lvert m^2\rvert$ を定義通りに計算すると以下のようになります.

$$\begin{aligned}\lvert m^2\rvert &= m^2\{(m+2)^2-2\}-\{(m+2)^2-1\}(m^2-1)\\&= m^2(m^2+4m+2)-(m^2+4m+3)(m^2-1)\\&= (m^4+4m^3+2m^2)-(m^4+4m^3+2m^2-4m-3)\\&= 4m+3\end{aligned}$$

また (1),(2) より $(n+2)^2-2$ の周辺は次のようになっていると証明できます.

$(n+4)^2-3$	$(n+2)^2-2$	n^2-1
$(n+4)^2-2$	$(n+2)^2-1$	n^2
$(n+4)^2-1$	$(n+2)^2$	$(n+2)^2+1$

従って $\lvert(n+2)^2-2\rvert$ を定義通りに計算すると以下のようになります.

$$\begin{aligned}\lvert(n+2)^2-2\rvert &= \{(n+2)^2-2\}n^2-(n^2-1)\{(n+2)^2-1\}\\&= n^2(n^2+4n+2)-(n^2-1)(n^2+4n+3)\\&= (n^4+4n^3+2n^2)-(n^4+4n^3+2n^2-4n-3)\\&= 4n+3\end{aligned}$$

問題 5 (★★☆)

この問題は二ムと呼ばれる問題です.

(1) このゲームは必勝法が存在します.

まず，各山の石の数を 2 進数に変換します.

このとき，各桁ごとの和を求めた数列を A と定義します.

例えば，$(2,3)$ の場合，2 進数表記は $(10_2, 11_2)$ であり，各桁の和を求めると $A=(2,1)$ となります.

・必勝と必敗の判定方法

自分の手番終了時に A のすべての要素が偶数である場合，自分は確実に勝てる状態にあります.

（理由：一度に 1 つの山からしか石を取れず，各操作では A の任意の要素を 最大 1 しか減らさないので，A に 0 より大きな偶数が含まれる場合，その手番では勝つことができません.）

例えば，$(3,3)$ の場合，2 進数表記は $(11_2, 11_2)$ であり，各要素の和を求めると $A=(2,2)$ となります.

このとき，自分の手番開始時に $A=(2,2)$ となっているため，自分は必敗形に追い込まれています．また $(1,3)$ や $(2,3)$ の場合，2 進数表記はそれぞれ $(1_2, 11_2)$，$(10_2, 11_2)$ であり，$A=(1,2), A=(2,1)$ となります．これは必敗形ではないです．したがって，(1) の答えは 3 です.

(2) $(5,3,7)$ の場合，2 進数表記は $(101_2, 11_2, 111_2)$ であり，各桁の和を求めると $A=(2,2,3)$ となります．ここで，どこかの山の石を 1 つ取ると $A=(2,2,2)$ になり，相手に必敗形を押し付けることができます.

したがって，先手が確実に勝つことができます.

問題 6 (★★★)

問題の性質から，カエルが奇数匹いるときは必ず 1 番右のマスにカエルがいて，残りの偶数匹のカエルは 2 匹ずつペアになることわかります．

	·	·		·	·		·

		·	·	·	·		·

ここから，カエルの数で場合分けをすることで全ての解を調べることができます．
0 匹の場合：全マスにカエルがいない状況は以下の 1 通りです．

1 匹の場合：カエルは 1 番右に必ずいるので以下の 1 通りです．

							·

2 匹の場合：カエルは 2 匹ずつのペアになるので，ありうる位置を考えれば 7 通りです．

·	·						

3 匹の場合：1 匹は 1 番右にいて，それ以外は 2 匹ずつのペアなので 6 通りです．

·	·						·

以下 4〜8 匹の場合も同様に考えて以下のような通り数になります．
4 匹の場合：15 通り

·	·			·	·		

5 匹の場合：10 通り

·	·		·	·			·

6 匹の場合：10 通り

·	·		·	·		·	·

7 匹の場合：4 通り

·	·	·	·	·	·		·

8 匹の場合：1 通り

·	·	·	·	·	·	·	·

従ってこれらの通り数を合計して，55 通りが答えになります．