四元数函数と微分可能性

古寺爽楽 *
学籍番号：BV24044

2024 年 10 月 31 日

目次

* 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

1　はじめに

実数や複素数を函数の引数に取る，実函数や複素函数に関する理論はあらゆる場所で見られる．しかし複素数をさらに拡張した四元数を引数として考えた四元数函数に関する理論はあまり見ないように感じられた．したがって以下では四元数の性質から四元数函数の簡単な性質に関してまとめる．最終的には四元数函数の微分可能性に関して考える．

2　四元数の定義

2.1　複素数の定義

四元数は複素数を拡張したものとして定義することにする．まず複素数 z は以下のように定義されていた．

定義 2.1 (複素数の定義)**.**

$$z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \qquad i^2 = -1$$

注意 2.1. ここで複素数は虚数単位 i というものを用いて複素数を定義している．

2.2　四元数の定義

よって同様に四元数 q を四元数単位 i, j, k を導入して以下のように定義することにする．

定義 2.2 (四元数の定義)**.**

$$q = a + bi + cj + dk \ (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad [i, j] = 2k$$

注意 2.2. ただし $[i, j] = ij - ji$ を表すことにする．

ここで四元数単位 i, j, k 同士の乗算 $a \times b$ は表にまとめると以下のようになる．

表 1　四元数単位の乗算表

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

注意 2.3. 定義 (2.2) と表 (2.2) からも分かるように四元数単位の乗算は非可換である．

3　四元数の四則演算

二つの四元数 $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ に対して四則演算を定義する．

3.1　加法・減法

加法や減法は実数や複素数の場合と同じように各単位ごとに計算を行うように定義する．

定義 3.1 (加法・減法)**.**

$$q_1 \pm q_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i + (c_1 \pm c_2)j + (d_1 \pm d_2)k$$

3.2　乗法

乗法は複素数と同様に，数を多項式の展開と同様に計算をして四元数単位の乗法に注意して計算を行う．ただし四元数単位は可換ではないため，積 $q_1 q_2, q_2 q_1$ をそれぞれ以下のように定める．

定義 3.2 (乗法)**.**

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ &\quad (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 q_1 &= (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2 + d_1 c_2 - c_1 d_2)i \\ &\quad (c_1 a_1 - d_1 b_2 + a_1 c_2 + b_1 d_2)j + (d_1 a_2 + c_1 b_2 - b_1 c_2 + a_1 d_2)k \end{aligned}$$

このように一般に四元数同士の積 $q_1 q_2, q_2 q_1$ はそれぞれ異なることが分かる．

3.3　除法

実数 a, b において除法 $a \div b$ は b の逆数 $\dfrac{1}{b}$ を a にかけるということを考えた．

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times a = a \times b^{-1} = b^{-1} a$$

例 3.1 ($6 \div 3$ の計算)**.**

$$6 \div 3 = 6 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

よって以下では四元数の逆数について考える．
まず複素数 $z = a + bi$ の逆数は次のように考えていた．

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

注意 3.1. 共役複素数：$\overline{z} = a - bi$　ノルム：$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ここで四元数 $q = a + bi + cj + dk$ でも複素数と同じように共役とノルムを以下のように定義する．

定義 3.3 (共役四元数・ノルム)**.**

$$\text{共役四元数：} \overline{q} = a - bi - cj - dk \quad \text{ノルム：} |q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

この共役四元数とノルムを用いて四元数の逆数は以下のように考えることができる．

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$$

四元数の逆数は定義できたが，四元数は非可換であるため除法は以下の二通りに定義できる．

定義 3.4 (除法)**.**

$$\text{左除法：} q_1 \div q_2 = q_2^{-1} q_1 = \frac{\overline{q_2}}{|q_2|^2} \times q_1 \quad \text{右除法：} q_1 \div q_2 = q_1 q_2^{-1} = q_1 \times \frac{\overline{q_2}}{|q_2|^2}$$

4　四元数函数

4.1　四元数函数の定義

実函数や複素函数と同様に，四元数函数を以下のように定義する．

定義 4.1 (四元数函数)**.** 四元数から四元数への写像として定義する．

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad q \mapsto f(q)$$

4.2　四元数函数の導函数

実函数や複素函数において導函数はそれぞれ以下のように定義されている．

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

しかし四元数の除法は右除法と左除法の二つの定義があった．したがって四元数函数の導函数を定義する際には，右側導函数と左側導函数を区別する必要がある．
よって四元数の右除法と左除法に対応する導函数を以下のように定義する．

定義 4.2 (四元数函数の導函数の定義)**.**

$$\text{左微分：} D_L f = \lim_{\Delta q \to 0} (\Delta q)^{-1} \{ f(q + \Delta q) - f(q) \}$$
$$\text{右微分：} D_R f = \lim_{\Delta q \to 0} \{ f(q + \Delta q) - f(q) \} (\Delta q)^{-1}$$

注意 4.1. 以下では四元数の微分に関しては左微分であると考える．

この四元数に関して右微分や左微分といった複数の微分を考えることができるという性質は，四元群論やローレンツ変換などの数学や物理学の分野において大変重要な意味を持つ．

4.3 複素函数の微分可能性

複素函数 $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ において以下の Cauchy-Riemann の方程式を満たすことが，複素函数 f が微分可能な必要十分条件である．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

今，$z = x + yi$ とすると，$\overline{z} = x - yi$ であるので x, y は次のように表せる．

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \tag{1}$$

ここで函数 f の変数を $z, \overline{z}$ であると考える．すると，f の全微分は以下のようになる．

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \tag{2}$$

また函数 f の変数が x, y であるときの全微分は以下のようになる．

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{3}$$

また式 (1) より，以下の式も成り立つ．

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2} \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i} \tag{4}$$

ここで式 (3) に式 (4) を代入して

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dz + d\overline{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dz - d\overline{z}}{2i} \\
df &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\overline{z}) \\
\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\overline{z}
\end{aligned}$$

ここで dz と $d\overline{z}$ の係数をそれぞれ比較して以下の式を得る．

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \tag{5}$$

注意 4.2. 式 (5) は Wirtinger 微分と呼ばれている．

いま Cauchy-Riemann の方程式より以下の式変形が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

このことから函数 $f(z)$ が微分可能であることと $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ であることが同値であることが言えた．

4.4　四元数函数の微分可能性

まず四元数函数における Cauchy-Riemann の方程式のようなものとして以下の式が挙げられる．

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -i\frac{\partial f}{\partial x_1} = -j\frac{\partial f}{\partial x_2} = -k\frac{\partial f}{\partial x_3} \tag{6}$$

注意 4.3. 式 (6) は微分可能な函数のクラスを線形函数のみに制限していることに注意する．

ここで四元数函数における Wirtinger 微分は以下の式となる．

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_0} - \frac{1}{3}\left(i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right\} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{q}} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

この四元数函数における Wirtinger 微分を以下で証明する．

証明. 四元数 $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ と q の共役 $\overline{q} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ を用いて

$$x_0 = \frac{q+\overline{q}}{2} \quad x_1 i + x_2 j + x_3 k = \frac{q-\overline{q}}{2}$$

ここで x_1, x_2, x_3 を $q, \overline{q}$ を用いて表現するために，$X = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ とする．
$X = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ の両辺に i をかけると以下のようになる．

$$iX = -x_1 + x_2 k - x_3 j$$

$iX = -x_1 + x_2 k - x_3 j$ と共役 $\overline{iX} = -x_1 - x_2 k + x_3 j$ を用いると x_1 は次のようになる．

$$x_1 = -\frac{1}{2}(iX + \overline{iX})$$

ここで $X = \dfrac{q-\overline{q}}{2}$ を代入すると，四元数 A, B に対して，$\overline{AB} = \overline{B} \times \overline{A}$ であることに注意して

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}(iX - \overline{X}i) \\ &= -\frac{1}{2}\left\{i\left(\frac{q-\overline{q}}{2}\right) - \overline{\left(\frac{q-\overline{q}}{2}\right)}i\right\} \\ &= -\frac{1}{4}\{i(q-\overline{q}) - (\overline{q}-q)i\} \\ &= -\frac{1}{4}(iq - i\overline{q} - \overline{q}i + qi) \end{aligned}$$

以下同様の操作を行うことで，x_2, x_3 は以下のように得ることができる．

$$x_2 = -\frac{1}{4}(jq - j\overline{q} - \overline{q}j + qj) \quad x_3 = -\frac{1}{4}(kq - k\overline{q} - \overline{q}k + qk)$$

ここで四元数函数 $f(q)$ を $q, \overline{q}$ を変数として見た時の全微分は以下のようになる．

$$df = \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial \overline{q}}d\overline{q} \tag{7}$$

また x_0, x_1, x_2, x_3 を変数として見た時の全微分は以下のようになる．

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 \tag{8}$$

二つの全微分の式 (7),(8) と x_0, x_1, x_2, x_3 の $q, \overline{q}$ による表現により以下の式を得ることができる．

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_0} - \frac{1}{3}\left(i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right\} \tag{9}$$

二つの全微分の式 (7),(8) から $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{q}}$ は以下のように求められる．

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{q}} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3} \tag{10}$$

□

ここで式 (6) と式 (10) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{q}} &= \frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ &= -i\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_3} + k\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって四元数函数の微分可能性の式として $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{q}} = 0$ を得たのである．これは式 (6) が四元数函数を線形函数に制限をしているということにより，この微分可能性の式はさらに定数函数のみしか満足しないということになってしまう．これは四元数函数の実用性を失ってしまう．よって他の微分可能性の定義の仕方を考える必要が出てくる．

5　今後の課題

5.1　局所的な複素平面による微分可能性

四元数 $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ に対して，点 q を基準として，実軸 x_0 と共に構成される平面上の複素変数を以下のように定義する．

定義 5.1.

$$\zeta = x_0 + \iota x \quad \iota = \frac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{|X|} \quad x = |X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

この ζ に対して，複素解析と同様の微分可能性条件を課すために以下の偏微分条件を導入する．

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \iota\frac{\partial}{\partial x}\right) f(q) = 0$$

この条件式というのは，ζ に対する微分可能性を保証して，複素函数における Cauchy-Riemann の方程式に対応する．この微分可能性条件の定義によって ζ の多項式函数として表されるような $f(q)$ が解析的であるとみなせるようになる．このことにより線形函数に制限されない多様な函数について考えることができ，Taylor 展開なども四元数において考えることが可能となる．

5.2　分からなかった点

5.2.1　四元数函数における Cauchy-Riemann の方程式

Cauchy-Riemann の方程式の四元数函数に対応する式 (6) の導出方法が分からなかった．

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -i\frac{\partial f}{\partial x_1} = -j\frac{\partial f}{\partial x_2} = -k\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

複素解析において Cauchy-Riemann の方程式と同様に，各四元数単位ごとに近づけるという導出方法により式 (6) を導出すると予想したが，四元数函数の導函数の定義が二通りの定義があるためこの方法で導出できないのではないかと考えた．

5.2.2 四元数函数における Wirtinger 微分

四元数函数における Wirtinger 微分に対応するものを導出した．その際全微分の式 (7),(8) と x_0, x_1, x_2, x_3 の $q, \overline{q}$ による表現で式 (9),(10) を導出したが，この変形にまだ解決していない問題がある．複素函数における Wirtinger 微分の導出では x, y の $z, \overline{z}$ による表現である式 (4) を用いて変形したのであるが，これを四元数函数においても行おうとすると四元数の非可換性により単純に計算を行うことが出来ないことが問題である．
すなわち複素函数 x, y というのは $z, \overline{z}$ を用いて以下の形で表されていた．

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

この式の両辺の微分を考えることで以下の式を導出して全微分の式に代入したのである．

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2} \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}$$

これを四元数函数の場合に考えるときに，x_0, x_1 は $q, \overline{q}$ で次のように表現されていた．

$$x_0 = \frac{q + \overline{q}}{2} \quad x_1 = -\frac{1}{4}(iq - i\overline{q} - \overline{q}i + qi)$$

ここで x_0 というのは複素数の場合と同様に両辺の微分を考えることが出来る．

$$dx_0 = \frac{dq + d\overline{q}}{2}$$

しかし x_0 というものを考えようとすると，$q, \overline{q}$ に単位四元数がかかっている状態になっている．
四元数の非可換性により iq, qi というものは違う函数となり，単純に diq, dqi となるのではないので複素数の場合と同様に考えることが困難なのである．

6 さいごに

四元数函数の微分可能性を複素函数の時のものを拡張すると定義することは容易でも解析的なクラスがかなり狭まってしまうということが起こってしまった．よって四元数解析についての積分などを考える場合にも単に複素函数の時の拡張を行うのではなくて，その性質に応じて柔軟に定義を行うことによって，より広い函数のクラスで積分などを考えることが出来るのであろう．今回は既に提案されている微分可能性の条件式について考えていったのであるが，ここから先は独自で性質に合った定義などを考えてみようと感じた．

参考文献

[1] Stefano De Leo , Pietro Rotelli 著 A New Definition of Hypercomplex Analyticity, 1997.
[2] 高校数学の美しい物語，コーシー・リーマンの関係式と微分可能性・正則関数, `https://manabitimes.jp/math/1310#4`, Accessed: October 30, 2024.