j 関数の特殊値 $j(\sqrt{-3})$ を求める

是川楓季

2024 年 11 月 1 日

目 次

1 はじめに

j 関数は数論幾何における重要な関数である．[1] にある $j(\sqrt{-2}) = 8000$ の証明を読んで，自分でも j 関数の特殊値を計算してみようと思ったことが動機である．j 関数の特殊値の導出を知ることで，この分野への理解がより深まると考えた．実際に計算を試みて，$j(\sqrt{-3})$ を求めるのは $j(\sqrt{-2})$ に比べて格段に大変だということがわかった．

2 数論幾何の準備

定義 1. 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合を $\mathbb{H}$ を，

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

で定める．$\mathbb{H}$ を**上半平面** (じょうはんへいめん) という．

定義 2.

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$$

で定義される集合は行列積に関して群をなす．これを**モジュラー群**という．

定義 3. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ z \in \mathbb{H}$ に対し，その左作用 $\cdot : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を $g \cdot z = \dfrac{az + b}{cz + d}$ で定める．

定義 4. 関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ がレベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の**保型関数**である[1]とは，

- f は $\mathbb{H}$ 上で正則
- 任意の $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と $z \in \mathbb{H}$ に対して，$f(g \cdot z) = f(z)$

をともに満たすことである．

補題 5. $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．正則関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が任意の $z \in \mathbb{H}$ に対して $f(S \cdot z) = f(z)$，$f(T \cdot z) = f(z)$ を満たすとき，f はレベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の保型関数である．

証明は S, T が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を生成することによる．この S, T はこの後も使う．

定義 6. レベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の保型関数 f はフーリエ級数展開を持つ．つまり f によって定まる複素数の列 $a_i(f)$ $(i \in \mathbb{Z})$ と記号 $q = e^{2\pi i z}$ を用いて

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n$$

とかける．この展開を q **展開**という．

定義 7. $k \geq 3$ を整数とする．$g_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ を

$$g_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(m + nz)^k}$$

で定める．g_k を**アイゼンシュタイン級数**という[2]．

保型関数というのは，モジュラー群の作用によって不変な正則関数である．モジュラー群の作用は一次分数変換であったから，この変換による対称性をもつ関数が保型関数であると理解することができる．

[1] レベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の保型関数を単に保型関数と書くことがある．
[2] アイゼンシュタイン級数は保型関数になるが，ここでは深入りしない．

3　j 関数

j 関数の定義と，重要な命題について触れておく．

定義 8. 関数 $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ を

$$j(z) = \frac{1728 \cdot 4 \cdot (15g_4(z))^3}{4(15g_4(z))^3 - 27(35g_6(z))^2}$$

で定める．これを j **関数**という．

命題 9. j 関数はレベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の保型関数である．

次の定理は j 関数の著しい性質である．

定理 10. f をレベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の保型関数とする．

- ある非負整数 N が存在して，$n < -N$ ならば $a_n(f) = 0$

をみたすとき f は j の複素係数多項式で表せる．加えて

- 任意の n に対して $a_n(f)$ は有理数 (ないし整数)

をみたすとき，f は j の有理数 (ないし整数) 係数多項式として表すことができる．

j 関数は次のような q 展開を持つことが知られている．

定理 11.

$$j(z) = q^{-1}\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} d^3 q^n\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

ただし，$\displaystyle\sum_{d|n}$ は n の正の約数 d にわたる総和を表す．

系 12.

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + O(q^3)$$

ここで，$O(q^n)$ は q の n 乗以降の項しか含まれないものを表している．

命題 13. j 関数の q 展開の係数はすべて非負整数である．

命題 14. $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ に対して，次の 2 つは同値である：

- $j(z_1) = j(z_2)$
- ある $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在して，$z_1 = g \cdot z_2$

4　計算の準備

この章では，どのようにして $j(\sqrt{-3})$ の値が計算されるかの説明と，その正当化を行う．以降，$\tau = \sqrt{-3}$ とする．

4.1 おおまかな流れ

まずは正当性は置いておき，どのように計算されるのかを見る．始めに関数

$$\begin{aligned}F(z) &= (j(z)-j(3z))\left(j(z)-j\left(\frac{z}{3}\right)\right)\left(j(z)-j\left(\frac{z+1}{3}\right)\right)\left(j(z)-j\left(\frac{z+2}{3}\right)\right)\\ &= j(z)^4 - Aj(z)^3 + Bj(z)^2 - Cj(z) + D\end{aligned}$$

を用意する．A, B, C, D はそれぞれ z の関数である．すると実は, A, B, C, D, F はすべて保型関数になる．A, B, C, D の q 展開を計算すると，負の次数の項は有限個しかないことがわかるので，これらは j の多項式として書ける．つまりある多項式関数 h が存在して，$F(z) = h(j(z))$ を満たす．また，$F(\tau) = 0$ であることが別に示せるので，$z = \tau$ を代入して $h(j(\tau)) = 0$ を得る．こうして，$j(\tau)$ は代数方程式 $h(z) = 0$ の解であるとわかる．

4.2 計算の正当化

上で行った説明の正当化を行う．

補題 15.

$$j(\tau) = j\left(\frac{\tau}{3}\right)$$

Proof. $\tau = \sqrt{-3}$ であることに注意すると，

$$j(\tau) = j\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\tau\right) = j\left(-\frac{1}{\tau}\right) = j\left(\frac{\tau}{3}\right)$$

と計算できる． □

この補題から，$F(\tau) = 0$ がわかる．

補題 16. $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ を 4 次の対称式とする．このとき

$$g(z) = f\left(j(3z), j\left(\frac{z}{3}\right), j\left(\frac{z+1}{3}\right), j\left(\frac{z+2}{3}\right)\right)$$

に対して，

$$g(T\cdot z) = g(z)$$

が成り立つ．

Proof.

$$
\begin{aligned}
j\left(3\left(T\cdot z\right)\right) &= j\left(3\left(z+1\right)\right) \\
&= j\left(3z\right) \\
j\left(\frac{T\cdot z}{3}\right) &= j\left(\frac{z+1}{3}\right) \\
j\left(\frac{T\cdot z+1}{3}\right) &= j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
j\left(\frac{T\cdot z+2}{3}\right) &= j\left(\frac{z+3}{3}\right) \\
&= j\left(T\cdot\frac{z}{3}\right) \\
&= j\left(\frac{z}{3}\right)
\end{aligned}
$$

より，対称式が引数の並べ替えに対して不変であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
g\left(T\cdot z\right) &= f\left(j(3z), j\left(\frac{z+1}{3}\right), j\left(\frac{z+2}{3}\right), j\left(\frac{z}{3}\right)\right) \\
&= f\left(j(3z), j\left(\frac{z}{3}\right), j\left(\frac{z+1}{3}\right), j\left(\frac{z+2}{3}\right)\right) \\
&= g(z)
\end{aligned}
$$

が得られる． □

補題 17. $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ を 4 次の対称式とする．このとき，

$$
g(z) = f\left(j(3z), j\left(\frac{z}{3}\right), j\left(\frac{z+1}{3}\right), j\left(\frac{z+2}{3}\right)\right)
$$

に対して，

$$
g\left(S\cdot z\right) = g(z)
$$

が成り立つ．

Proof.

$$
\begin{aligned}
j\left(3\left(S\cdot z\right)\right) &= j\left(3\left(-\frac{1}{z}\right)\right) = j\left(-\frac{3}{z}\right) = j\left(S\cdot\left(-\frac{3}{z}\right)\right) = j\left(\frac{z}{3}\right) \\
j\left(\frac{S\cdot z}{3}\right) &= j\left(-\frac{1}{3z}\right) = j\left(S\cdot\left(3z\right)\right) = j\left(3z\right) \\
j\left(\frac{S\cdot z+1}{3}\right) &= j\left(\frac{z-1}{3z}\right) = j\left(S\cdot\frac{-3z}{z-1}\right) = j\left(ST^{-3}\cdot\frac{-3}{z-1}\right) = j\left(ST^{-3}S\cdot\frac{z-1}{3}\right) \\
&= j\left(ST^{-3}ST^{-1}\cdot\frac{z+2}{3}\right) = j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
j\left(\frac{S\cdot z+2}{3}\right) &= j\left(\frac{2z-1}{3z}\right) = j\left(S\cdot\frac{-3z}{2z-1}\right) = j\left(ST^{-1}\cdot\frac{-z-1}{2z-1}\right) = j\left(ST^{-1}S\cdot\frac{2z-1}{z+1}\right) = j\left(ST^{-3}ST^{2}\cdot\frac{-3}{z+1}\right) \\
&= j\left(ST^{-3}ST^{2}S\cdot\frac{z+1}{3}\right) = j\left(\frac{z+1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

より，対称式が引数の並べ替えに対して不変であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
g\left(S\cdot z\right) &= f\left(j\left(\frac{z}{3}\right), j(3z), j\left(\frac{z+2}{3}\right), j\left(\frac{z+1}{3}\right)\right) \\
&= f\left(j(3z), j\left(\frac{z}{3}\right), j\left(\frac{z+1}{3}\right), j\left(\frac{z+2}{3}\right)\right) \\
&= g(z)
\end{aligned}
$$

が得られる． □

補題 18. A,B,C,D,F は保型関数.

Proof. A,B,C,D は $j(3z), j\left(\frac{z}{3}\right), j\left(\frac{z+1}{3}\right), j\left(\frac{z+2}{3}\right)$ の対称式だから，補題 16，補題 17 より変換 S,T によって不変である．また，正則であるので補題 5 より A,B,C,D は保型関数である．F は保型関数の和と積で表されていることがわかったから，保型関数である． □

これで正当性については一通り見た．A,B,C,D の q 展開の負の係数が有限個であることは実際に計算する際にわかる．

5 $j(\sqrt{-3})$ の計算

5.1 q 展開の導出

補題 19.

$$
A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)q^{3n} + 3\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j)q^n
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
A &= j\left(3z\right) + j\left(\frac{z}{3}\right) + j\left(\frac{z+1}{3}\right) + j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)e^{2\pi i n 3z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)e^{2\pi i n\frac{z}{3}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)e^{2\pi i n\frac{z+1}{3}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)e^{2\pi i n\frac{z+2}{3}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)q^{3n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)\left(e^{2\pi i n\frac{z}{3}} + e^{2\pi i n\frac{z+1}{3}} + e^{2\pi i n\frac{z+2}{3}}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)q^{3n} + 3\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j)q^n
\end{aligned}
$$

□

補題 20.

$$
B = 3\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j)q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j)q^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)q^{3n}\right)
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
B = j\left(3z\right) j\left(\frac{z}{3}\right) + j\left(3z\right) j\left(\frac{z+1}{3}\right) + j\left(3z\right) j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
+ j\left(\frac{z}{3}\right) j\left(\frac{z+1}{3}\right) + j\left(\frac{z}{3}\right) j\left(\frac{z+2}{3}\right) + j\left(\frac{z+1}{3}\right) j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
= j\left(3z\right)\left(A - j(3z)\right) + j\left(\frac{z}{3}\right) j\left(\frac{z+1}{3}\right) + j\left(\frac{z}{3}\right) j\left(\frac{z+2}{3}\right) + j\left(\frac{z+1}{3}\right) j\left(\frac{z+2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

であって、

$$
\begin{aligned}
& j\left(\frac{z}{3}\right) j\left(\frac{z+1}{3}\right) + j\left(\frac{z}{3}\right) j\left(\frac{z+2}{3}\right) + j\left(\frac{z+1}{3}\right) j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
=& \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j) e^{2\pi i n \frac{z}{3}}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(j) e^{2\pi i m \frac{z+1}{3}}\right) + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j) e^{2\pi i n \frac{z}{3}}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(j) e^{2\pi i m \frac{z+1}{3}}\right) \\
& + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j) e^{2\pi i n \frac{z}{3}}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(j) e^{2\pi i m \frac{z+1}{3}}\right) \\
=& \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(a_n(j) e^{2\pi i n \frac{z}{3}} a_m(j) e^{2\pi i m \frac{z+1}{3}} + a_n(j) e^{2\pi i n \frac{z+1}{3}} a_m(j) e^{2\pi i m \frac{z+2}{3}} + a_n(j) e^{2\pi i n \frac{z+2}{3}} a_m(j) e^{2\pi i m \frac{z}{3}}\right) \\
=& \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n(j) a_m(j)\left(e^{2\pi i n \frac{z}{3}} e^{2\pi i m \frac{z+1}{3}} + e^{2\pi i n \frac{z+1}{3}} e^{2\pi i m \frac{z+2}{3}} + e^{2\pi i n \frac{z+2}{3}} e^{2\pi i m \frac{z}{3}}\right) \\
=& \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n(j) a_m(j) (e^{2\pi i n \frac{z}{3}} e^{2\pi i m \frac{z+1}{3}} + e^{2\pi i n \frac{z+1}{3}} e^{2\pi i m \frac{z+2}{3}} + e^{2\pi i n \frac{z+2}{3}} e^{2\pi i m \frac{z}{3}} \\
& + e^{2\pi i n \frac{z}{3}} e^{2\pi i m \frac{z+2}{3}} + e^{2\pi i n \frac{z+1}{3}} e^{2\pi i m \frac{z}{3}} + e^{2\pi i n \frac{z+2}{3}} e^{2\pi i m \frac{z+1}{3}}) \\
=& \frac{1}{2}\left(6\sum_{3|n}\sum_{3|m} a_n(j) a_m(j) q^{\frac{n+m}{3}} - 3\sum_{3|(n-1)}\sum_{3|(m-2)} a_n(j) a_m(j) q^{\frac{n+m}{3}+1} - 3\sum_{3|(n-2)}\sum_{3|(m-1)} a_n(j) a_m(j) q^{\frac{n+m}{3}+1}\right) \\
=& 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j) a_{3m}(j) q^{n+m} - 3\sum_{n}\sum_{m} a_{3n+1}(j) a_{3m+2}(j) q^{n+m+1} \\
=& 3\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j) q^n\right)^2 - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}(j) q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}(j) q^n\right)
\end{aligned}
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
B =& 3\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j) q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j) q^{3n}\right) + 3\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j) q^n\right)^2 - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}(j) q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}(j) q^n\right) \\
=& 3\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j) q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j) q^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j) q^{3n}\right) - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}(j) q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}(j) q^n\right)
\end{aligned}
$$

□

補題 21.

$$C = j(3z)\left(3\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j)q^n\right)^2 - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}(j)q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}(j)q^n\right)\right)$$
$$+\sum_{i=0}^{2} q^i\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+i}q^n\right)^3 - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}q^n\right)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
C &= j\left(3z\right)j\left(\frac{z}{3}\right)j\left(\frac{z+1}{3}\right) + j\left(3z\right)j\left(\frac{z}{3}\right)j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
&\quad + j\left(3z\right)j\left(\frac{z+1}{3}\right)j\left(\frac{z+2}{3}\right) + j\left(\frac{z}{3}\right)j\left(\frac{z+1}{3}\right)j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
&= j(3z)\left(3\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j)q^n\right)^2 - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}(j)q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}(j)q^n\right)\right) + j\left(\frac{z}{3}\right)j\left(\frac{z+1}{3}\right)j\left(\frac{z+2}{3}\right)
\end{aligned}$$

であって，

$$\begin{aligned}
&j\left(\frac{z}{3}\right)j\left(\frac{z+1}{3}\right)j\left(\frac{z+2}{3}\right) \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(j)e^{2\pi i n\frac{z}{3}}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(j)e^{2\pi i m\frac{z+1}{3}}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(j)e^{2\pi i k\frac{z+2}{3}}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(j)e^{2\pi i n\frac{z}{3}}a_m(j)e^{2\pi i m\frac{z+1}{3}}a_k(j)e^{2\pi i k\frac{z+2}{3}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(j)a_m(j)a_k(j)e^{2\pi i n\frac{z}{3}}e^{2\pi i m\frac{z+1}{3}}e^{2\pi i k\frac{z+2}{3}} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{3|n}\sum_{3|m}\sum_{3|k} 6a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} + \frac{1}{6}\sum_{3|(n-1)}\sum_{3|(m-1)}\sum_{3|(k-1)} 6a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} \\
&\quad + \frac{1}{6}\sum_{3|(n-2)}\sum_{3|(m-2)}\sum_{3|(k-2)} 6a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} \\
&\quad - \frac{1}{6}\sum_{3|(n)}\sum_{3|(m-1)}\sum_{3|(k-2)} 3a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} - \frac{1}{6}\sum_{3|(n)}\sum_{3|(m-2)}\sum_{3|(k-1)} 3a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} \\
&\quad - \frac{1}{6}\sum_{3|(n-1)}\sum_{3|(m)}\sum_{3|(k-2)} 3a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} - \frac{1}{6}\sum_{3|(n-1)}\sum_{3|(m-2)}\sum_{3|(k)} 3a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} \\
&\quad - \frac{1}{6}\sum_{3|(n-2)}\sum_{3|(m)}\sum_{3|(k-1)} 3a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} - \frac{1}{6}\sum_{3|(n-2)}\sum_{3|(m-1)}\sum_{3|(k)} 3a_n(j)a_m(j)a_k(j)q^{\frac{n+m+k}{3}} \\
&= \sum_{i=0}^{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{3n+i}(j)a_{3m+i}(j)a_{3k+i}(j)q^{n+m+k+i} - 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{3n}(j)a_{3m+1}(j)a_{3k+2}(j)q^{n+m+k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{2} q^i\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+i}q^n\right)^3 - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}q^n\right)
\end{aligned}$$

より従う． □

補題 22.

$$D = j(3z)\left(\sum_{i=0}^{2} q^i \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+i}q^n\right)^3 - 3q\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n}q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+1}q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n+2}q^n\right)\right)$$

Proof. 補題 21 と同様にして示される．□

5.2 多項式 h の決定

前節で求めた q 展開を，コンピュータを用いて具体的に計算する．すべて整数係数のべき級数になっているので，扱いやすい．求めた q 展開を j 関数の q 展開で q の多項式として割ると，j 関数の多項式で A, B, C, D を表すことができる．次の結果を得ることができた．

系 23.

$$\begin{aligned}
A &= j(z)^3 - 2232j(z)^2 + 1069956j(z) - 36864000\\
B &= 2232j(z)^3 + 2587918086j(z)^2 + 8900222976000j(z) - 452984832000000\\
C &= 1069956j(z)^3 - 8900222976000j(z)^2 + 770845966336000000j(z) - 1855425871872000000000\\
D &= j(z)^4 + 36864000j(z)^3 + 452984832000000j(z)^2 + 1855425871872000000000j(z)
\end{aligned}$$

これですべての道具は揃った．A, B, C, D を $F(z)$ に代入すれば，多項式 h が求まる．

$$\begin{aligned}
h(x) &= -x^6 + 4464x^5 + 2585778176x^4 + 17800519680000x^3 - 769939996672000000x^2 + 3710851743744000000000x\\
&= -(x-54000)(x-8000)^2x(x+32768)^2
\end{aligned}$$

うまく因数分解できた．計算は間違っていなかったようだ．ここから，$j(\sqrt{-3})$ は $0, 8000, 54000, -32768$ のいずれかであることがわかる．

5.3 $j(\sqrt{-3})$ の値

最後に，4 つの値のどれになるかを決定しよう．$j(z)$ の q 展開に $z=\sqrt{-3}$ を代入してみる．

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{-3}) &= e^{2\pi\sqrt{3}} + 744 + 196884e^{-2\pi\sqrt{3}} + \dots\\
&> 53999.9924 + \dots
\end{aligned}$$

さて，$j(z)$ の q 展開の係数はすべて非負整数なのだった (命題 13)．ゆえに $j(\sqrt{-3}) > 53999$ であり，これを満たすのは 54000 のみである．長かったが，次を得ることができた．

定理 24.

$$j(\sqrt{-3}) = 54000.$$

6 おわりに

求めたかった値を計算することができた．満足である．それにしても，このような煩雑な計算によって簡単な値が出てくるとは驚きである．C の定数項の絶対値 1855425871872000000000 は，素因数分解すると $2^{45}\cdot 3^3\cdot 5^9$ になる．$j(z)$ の q 展開の係数を複雑に足したり掛けたりした結果がこのような値になるのは，本当に信じられないことだと思う．また 2 次の代数的数における j 関数の値は，虚数乗法論という理論と深いかかわりがあるようだ．この辺りについても深めていきたい．

参考文献

[1] 三枝洋一, 数論幾何入門, 森北出版, 2024.