$1/\cosh^2 x$ 型の積分の解析接続

手塚利公

1　プロローグ

コレは悪ノリから始まった結果である。

2　発端

まずゼータ関数の定義を確認する

ゼータ関数の定義

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

これが $\mathrm{Re}(s) > 1$ で収束していることは良く知られた事実である。

これを積分表示する

ゼータ関数の積分表示

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

$\mathrm{Re}(s) > 1$ とする。

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \\
&= \int_0^{\infty} (nt)^{s-1} e^{-nx} n dt \quad (x \to nt) \\
&= n^s \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-nx} dt
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$$

この n を 1 から N まで総和を取ると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=1}^{N}e^{-nx}dx\end{aligned}$$

$N\to\infty$ の極限をとって

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}\frac{1-e^{-Nx}}{e^x-1}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx - \frac{1}{\Gamma(s)}\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty x^{s-1}\frac{e^{-Nx}}{e^x-1}dx\end{aligned}$$

最後の項の極限を不等式評価により求める。三角不等式より

$$\begin{aligned}0 \le \left|\int_0^\infty x^{s-1}\frac{e^{-Nx}}{e^x-1}dx\right| &\leqq \int_0^\infty \left|x^{s-1}\frac{e^{-Nx}}{e^x-1}\right|dx \\ &\le \int_0^\infty \left|x^{s-1}\right|\frac{e^{-Nx}}{e^x-1}dx\end{aligned}$$

ここで

$$|x^{s-1}| = |x^{\mathrm{Re}(s-1)}|\cdot|x^{\mathrm{Im}(s-1)}| = |x^{\mathrm{Re}(s-1)}|$$

であるとともにテイラー展開から

$$e^x - 1 \ge x$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|x^{s-1}\right|\frac{e^{-Nx}}{e^x-1}dx &\leqq \int_0^\infty x^{\mathrm{Re}(s-1)}\frac{e^{-Nx}}{x}dx \\ &= \int_0^\infty x^{\mathrm{Re}(s)-2}e^{-Nx}dx \\ &= \frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s)-1)}{N^{\mathrm{Re}(s)-1}} \to 0 \qquad N\to\infty\end{aligned}$$

以上より

$$\int_0^\infty x^{s-1}\frac{e^{-Nx}}{e^x-1}dx \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

都合の良いゼータ関数の積分表示

$$2^{1-s}(1-2^{1-s})\Gamma(s+1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{\cosh^2 x}dx$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(2u)^{s-1}}{e^{2u}-1}2du \qquad t \to 2u \\
&= 2^s\int_0^\infty u^{s-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^u-1}-\frac{1}{e^u+1}\right)du \\
&= 2^{s-1}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u-1}du - 2^{s-1}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u+1}du \\
&= 2^{s-1}\Gamma(s)\zeta(s) - 2^{s-1}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u+1}du \\
(1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u+1}du \\
&= \left[\frac{1}{s}\frac{u^s}{e^u+1}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{u^s e^u}{(e^u+1)^2}du \\
(1-2^{1-s})\Gamma(s+1)\zeta(s) &= \int_0^\infty \frac{u^s}{e^u+e^{-u}+2}du \\
&= \int_0^\infty \frac{u^s}{(e^{u/2}+e^{-u/2})^2}du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{u^s}{\cosh^2(u/2)}du \\
&= \frac{2^{s+1}}{4}\int_0^\infty \frac{x^s}{\cosh^2 x}dx \qquad u \to 2x \\
2^{1-s}(1-2^{1-s})\Gamma(s+1)\zeta(s) &= \int_0^\infty \frac{x^s}{\cosh^2 x}dx
\end{aligned}$$

被積分関数 $\dfrac{x^s}{\cosh^2 x}$ を次の経路で積分する。分岐切断に沿うような経路なので、主枝で

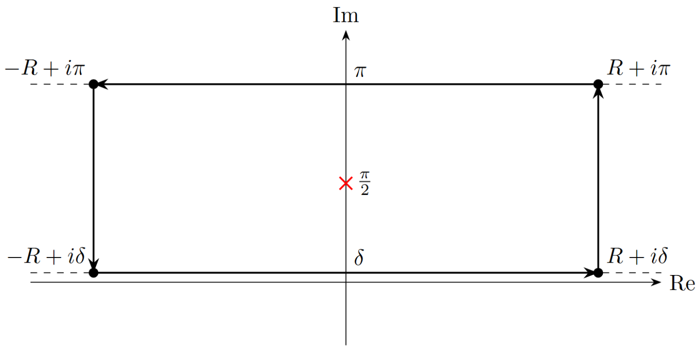

図 1　積分経路

あることを強調するため δ 浮いているがそれ以上の深い意味はない。

下、右、上、左の経路を順に I_1, I_2, I_3, I_4 とすると、留数定理より

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{x=\frac{i\pi}{2}} \left(\frac{x^s}{\cosh^2 x} \right)$$

であり、各積分値は $R \to \infty$ にて

$$I_1 = \int_{-R+\delta i}^{R+\delta i} \frac{x^s}{\cosh^2 x} dx \qquad I_3 = -\int_{-R+i\pi}^{R+i\pi} \frac{x^s}{\cosh^2 x} dx$$

$$\to (1 + e^{i\pi s}) \int_0^\infty \frac{x^s}{\cosh^2 x} dx \qquad \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+i\pi)^s}{\cosh^2 x} dx$$

$$I_2 = \int_{R+\delta i}^{R+i\pi} \frac{x^s}{\cosh^2 x} dx \qquad I_4 = -\int_{-R+\delta i}^{-R+Ni\pi} \frac{x^s}{\cosh^2 x} dx$$

$$\to 0 \qquad \to 0$$

であり、留数は

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{x=i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x^s}{\cosh^2 x}\right) &= \operatorname*{Res}_{x=0}\left(\frac{(x+i\frac{\pi}{2})^s}{\cosh^2(x+i\frac{\pi}{2})}\right) \\
&= \operatorname*{Res}_{x=0}\left(\frac{(x+i\frac{\pi}{2})^s}{-\sinh^2 x}\right) \\
&= -\operatorname*{Res}_{x=0}\left(\left(i\frac{\pi}{2}\right)^s + s\left(i\frac{\pi}{2}\right)^{s-1}x + O(x^2)\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}+O(x^2)\right) \\
&= -\operatorname*{Res}_{x=0}\left(s\left(i\frac{\pi}{2}\right)^{s-1}x^{-1}+O(1)\right) \\
&= -s\left(i\frac{\pi}{2}\right)^{s-1}
\end{aligned}
$$

よって次を得る。

$$
(1+e^{i\pi s})\int_0^\infty \frac{x^s}{\cosh^2 x}dx - \int_{-\infty}^\infty \frac{(x+i\pi)^s}{\cosh^2 x}dx = -2\pi i s\left(\frac{i\pi}{2}\right)^{s-1} \tag{1}
$$

積分の項をよく見ると、これは如何なる $s\in\mathbb{C}$ においても、経路が特異点を通らず、分母の絶対値が指数増加なので比較判定より収束する。

また、残りの項は定義が尽くされたものと ζ で出来ている。つまり、これでゼータ関数の解析接続が完了したことを意味する。

前節で導出したゼータ関数の表示を用いて次のようになる。

解析接続結果

$$
(1+e^{i\pi s})2^{1-s}(1-2^{1-s})\Gamma(s+1)\zeta(s) + 2\pi i s\left(\frac{i\pi}{2}\right)^{s-1} = \int_{-\infty}^\infty \frac{(x+i\pi)^s}{\cosh^2 x}dx
$$

なお、この手法を応用し、積分経路を虚軸方向に伸ばすと関数等式がでてくる。次ページに記す。説明は割愛とする。

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{x=0}\left(\frac{\left(x+i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^s}{\sinh^2 x}\right)\\
&=\operatorname*{Res}_{x=0}\left(\left(\left(i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^s+sx\left(i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^{s-1}+O(x^2)\right)\left(\frac{1}{x^2}+O(1)\right)\right)\\
&=\sum_{n=1}^{N}\left(i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^{s-1}
\end{aligned}$$

であるので

$$\int_{-R+\delta i}^{R+\delta i}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx+\int_{R+\delta i}^{R+Ni\pi}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx$$

$$\int_{-R+Ni\pi}^{R+Ni\pi}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx-\int_{-R+\delta i}^{-R+Ni\pi}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx=2\pi i\sum_{n=1}^{N}\operatorname*{Res}_{x=i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^s}{\cosh^2 x}\right)$$

$$(1+e^{i\pi s})\int_{0}^{R}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx+\int_{R}^{R+Ni\pi}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx$$

$$-\int_{-R}^{R}\frac{(x+Ni\pi)^s}{\cosh^2 x}dx-\int_{-R}^{-R+Ni\pi}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx=-2\pi i\sum_{n=1}^{N}\operatorname*{Res}_{x=0}\left(\frac{\left(x+i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^s}{\sinh^2 x}\right)\qquad \delta\to+0$$

$$(1+e^{i\pi s})\int_{0}^{\infty}\frac{x^s}{\cosh^2 x}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+Ni\pi)^s}{\cosh^2 x}dx=-2\pi i\sum_{n=1}^{N}\left(i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^{s-1}$$

$$(1+e^{i\pi s})2^{1-s}(1-2^{1-s})\Gamma(s+1)\zeta(s)+2\pi is\sum_{n=1}^{N}\left(i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^{s-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+Ni\pi)^s}{\cosh^2 x}dx\qquad R\to\infty$$

$$(1+e^{i\pi s})2^{1-s}(1-2^{1-s})\Gamma(s+1)\zeta(s)+2(i\pi)^s s\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{s-1}=0\qquad s<0, N\to\infty$$

$$(1+e^{i\pi s})2^{1-s}(1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s)+2(i\pi)^s(2^{1-s}-1)\zeta(1-s)=0$$

ここから応用を考察する。ディリクレ級数に目をつけた。

数列 a_n に対して、ディリクレ級数を次のように表示する。

$$\zeta[a_n](s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

次のような関数に興味が向くこととなった。

問題提起

複素数列 $\{a_n\}$ に対し、次のような関数 $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が存在できるような $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ の拡張となるような $a(n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在するか。

1. $A(u)$ は有理型関数
2. $2A(2u)$ のラプラス変換は $a(n)$
3. $A(u)$ は偶関数

なぜ気になるかというと、もしこのようなことが可能であれば、次のようなことが起きる。

まず、関数 A の定義は数列 a_n を次のように表示できるということである。

$$a_n := 2\int_0^{\infty} A(2u)e^{-nu}du$$

後に使うため、次も示しておく

$$a_{2n} = \int_0^{\infty} A(u)e^{-nu}$$

とすると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s)\frac{a_{2n}}{n^s} &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{s-1} A(u) e^{-n(t+u)} dt du \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty (t-u)^{s-1} A(u) e^{-nt} dt du \\
&= \int_0^\infty e^{-nt} \int_0^t (t-u)^{s-1} A(u) du dt \\
\Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{a_{2n}}{n^s} &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} \int_0^t (t-u)^{s-1} A(u) du dt \\
\Gamma(s)\zeta[a_{2n}](s) &= \int_0^\infty \frac{1}{e^t-1} \int_0^t (t-u)^{s-1} A(u) du dt \\
&= \int_0^\infty \frac{2}{e^{2t}-1} \int_0^{2t} (2t-u)^{s-1} A(u) du dt \\
&= 2^s \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{e^t+1}\right) \int_0^t A(2u)(t-u)^{s-1} du dt \\
\int_0^\infty \frac{1}{e^t-1} \int_0^t A(2u)(t-u)^{s-1} du dt &= \int_0^\infty \frac{1}{e^t+1} \int_0^t A(2u)(t-u)^{s-1} du dt + 2^{-s}\Gamma(s)\zeta[a_{2n}](s) \\
\Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \int_0^\infty A(2u) e^{-nu} du &= \int_0^\infty \frac{1}{e^t+1} \int_0^t A(2u)(t-u)^{s-1} du dt + 2^{-s}\Gamma(s)\zeta[a_{2n}](s) \\
\Gamma(s)\left(2^{-1}\zeta[a_n](s) - 2^{-s}\zeta[a_{2n}](s)\right) &= \left[\frac{1}{s}\frac{1}{e^t+1} \int_0^t A(2u) 2^{-s}\Gamma(s)\zeta[a_{2n}](s)(t-u)^s du\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{1}{4\cosh^2\frac{t}{2}} \int_0^t A(2u)(t-u)^s du dt \\
&= \frac{2^{-1}}{s} \int_0^\infty \frac{1}{\cosh^2 t} \int_0^{2t} A(2u)(2t-u)^s du dt \\
2^{-s-1}\left(\zeta[a_n](s) - 2^{1-s}\zeta[a_{2n}](s)\right)\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty \frac{1}{\cosh^2 t} \int_0^t A(4u)(t-u)^s du dt
\end{aligned}
$$

今はまだ、この式について検証が不十分であるが、例えば次のような関数について何かしら情報が得られると考えている

応用を思案している表示

$$\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{\cosh^2 x}dx = 1 + \frac{s}{2}\left[\psi^{(0)}\left(\frac{s}{4}+\frac{1}{2}\right) - \psi^{(0)}\left(\frac{s}{4}+1\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{\cosh^2 x}dx &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{x^n e^{-sx}}{\cosh^2 x}dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d^n}{ds^n} s\left[\psi^{(0)}\left(\frac{s}{4}+\frac{1}{2}\right) - \psi^{(0)}\left(\frac{s}{4}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{n}{4^{n-1}}\left[\psi^{(n-1)}\left(\frac{s}{4}+\frac{1}{2}\right) - \psi^{(n-1)}\left(\frac{s}{4}+1\right)\right]\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{4^n}\left[\psi^{(n)}\left(\frac{s}{4}+\frac{1}{2}\right) - \psi^{(n)}\left(\frac{s}{4}+1\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

これの両辺を s について反復微分することで、($n > 0$ とすると)

コレをもって、次回への抱負とさせていただく。