微分方程式の解の一意性

手塚，野口，秋山，田中

2024 年 10 月 25 日

目次

1 動機

特定の型の微分方程式に対して，ある解法を用いてその解を求めることができる．しかし，その解が唯一のものであるか，つまり他の解が存在しないことを確認する必要がある．

2 前提

まず扱いやすいように方程式の形をきめる．今回は一階微分方程式で考えることにする．

2.1 考える方程式

初期条件を併記すれば

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

となる．

2.2 定義域

x^{-1} に代表されるように，解析的に重要な関数も場所によって微分不能となることはよくあることである．

そこで今回，関数の定義域は閉区間

$$t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \Leftrightarrow |t - t_0| \leq a$$

に限るものとする．

2.3 値域

もう一つ，微分可能な関数について重要な性質がある．それは定義域に対して有限の値を返すということだ．

最大値・最小値の定理から，連続関数は閉区間において最大値・最小値をもつので，考えるべき関数が返す値を最初から縛ったとしても問題はないはずだ．

要するに

$$x_0 - b \leq x \leq x_0 + b \Leftrightarrow |x - x_0| \leq b$$

という仮定を置くにほかならない．

2.4 f について

2.4.1 有界性

微分可能ということは，その微分係数が有限の値に確定することだ．今 x は微分可能と仮定しているのだから，dx/dt は有界であるべきである．

それは同時に

$$|f(t,x)| \leq M$$

を意味する．

2.4.2 偏微分可能性

連続性や微分可能性を強く仮定すればするほど，考慮すべき関数がへり，問題が扱いやすくなる．今，$f(t,x)$ は t に関わらず x について一階偏微分可能連続であると仮定すると，平均値の定理より閉領域内の任意の実数 x, y について

$$\exists c \text{ s.t. } \frac{f(t,x)-f(t,y)}{x-y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,c)$$

が言え，閉領域 $(|x-x_0|<b)$ の連続関数なので，$\partial f/\partial x$ は最大最小を持ち，有界であることより次の右辺が存在する．

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)\right| \leq \underset{|x-x_0|<b}{\mathrm{Max}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$$

右辺は t の関数であるといえる．よって実数 L を

$$L = \sup_{|t-t_0|<a} \left(\underset{|x-x_0|<b}{\mathrm{Max}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \right)$$

と定めれば f は常に

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|$$

を満たす．

なお，偏微分可能であることは，上式を満たすことよりも強力な条件である．(つまり，偏微分可能なら上式を満たすが，その逆は成り立たない．上式を満たすが偏微分は出来ない関数が存在する．)

しかし，この後の議論に偏微分可能であることは必要ではない．以下に示すリプシッツ条件と呼ばれる性質を満たせば十分である．

$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ s.t. } |f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|$$

よって，リプシッツ条件を今回の問いへの前提条件とすることにする．

ちなみに，説明は省くが，リプシッツ条件を満たすならば $f(t,x)$ は x について連続であることが従う．

3 問題定義

上記を踏まえ，今回扱う問題は次のように定式化される

【本題】

a, b, M, L を全て正の実数であるとし，t_0, x_0 は任意の実数であるとする．

x を t の関数であるとし，集合 Ω を C^1 級かつ $|x - x_0| \leq b$ を満たす，$|t - t_0| \leq a$ 上で定義される実関数の集合であるとする．[a]

また，二変数関数 $f(t, x)$ は $(t, x), (t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ において次の性質を満たすとする

$$|f(t, x)| \leq M$$
$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

このとき，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

は $x \in \Omega$ において解をもつか．また，存在するならいくつ存在するか．

[a] 集合論的な表現をすれば

$$\Omega = \left\{ x \in \mathrm{Map}([t_0 - a, t_0 + a],\ [x_0 - b, x_0 + b]) \mid x \text{ is } C^1 \right\}$$

となる．

4 逐次近似

一度，微分方程式から方程式の話に移す．

次の方程式は解けるだろうか．

$$x = \cos x$$

正直言って解けたもんじゃない．が，しかし方法がある．

突然ではあるが，この方程式を

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

という漸化式だと考えてほしい．

そして，数回電卓を叩き，

$$x_n = \cos(\cos(\cos(\cdots\cos(x_0)\cdots)))$$

を計算してみてほしい (x_0 は任意)．ある値に収束するだろう．

これを

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

とおく．

ここで

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

の $n \to \infty$ の極限を考えると，連続性から

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \cos(x_n)$$
$$x^* = \cos\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \cos x^*$$

となる．これは方程式の解にほかならない．

これは要するに，方程式を無理やり漸化式だとみなして，もし数列が収束すれば，その収束先は元の方程式の解だということだ．(右辺に登場する関数が少なくとも解周りで連続であることが必要であるが．)

なお，今回の例では初期値 x_0 にどんな実数を持ってきても必ず収束する．これには

$$|\cos x - \cos y| \leq \sin 1|x-y| \text{ in } x, y \in [-1, 1]$$

であることが深く関わっている．

$-1 \leq \cos x \leq 1$ なのだから，初期値 x_0 はその範囲内として差し支えない．[*1]

よって $x = x_0$，$y = x^*$ とすれば

$$|\cos x_0 - \cos x^*| \leq \sin 1|x_0 - x^*|$$

[*1] 要するに $x_0 = 2$ のような場合は x_1 から見ろということである．数列の極限は最初数項を省いても変わらない．

$$
\begin{aligned}
|x_1 - x^*| &\leq \sin 1 |x_0 - x^*| \\
|\cos x_1 - \cos x^*| &\leq \sin 1 |x_1 - x^*| \\
|x_2 - x^*| &\leq \sin^2 1 |x_0 - x^*| \\
&\cdots \\
\forall n, |x_n - x^*| &\leq \sin^n 1 |x_0 - x^*|
\end{aligned}
$$

右辺を ε と捉えれば，$\sin 1 < 1$ より収束することを指し示している．

このようにして方程式の解を得ることを逐次近似という．

5 微分方程式の変形

前頁の内容を応用したい．今，微分方程式 (2.1) の両辺は連続関数だから，積分ができる．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(t,x) \\
\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{ds}(s)ds &= \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \\
x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds
\end{aligned}
$$

これを漸化式としてみなせば

$$
x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))ds
$$

となる．関数列である．初期値 x_0 と添字が衝突するがきれいなので $x_0(t)$ が初項である．

以降の x_0 がどっちの意味のなのかは，文脈から読み取る読者への課題とさせてもらう．

6 方針

解の一意性を証明する方針を掲げる

- 関数列 $\{x_n(t)\}$ が $x_0(t)$ の取り方によらず一様収束することを証明する．
- 関数列 $\{x_n(t)\}$ の収束先は方程式の解になっていることを証明する．
- 関数列 $\{x_n(t)\}$ の収束先は $x_0(t)$ の取り方に依らないことを証明する．

これらが証明できれば，Ω 内の微分方程式の解は逐次近似により求まる唯一の関数であることが言える．

7 いざ証明

7.1 初項に依らず関数列は収束する

定義より

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_n(s))| \, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right| = |M(t - t_0)| \leq Ma
\end{aligned}
$$

また，漸化式の差を取れば

$$
x_{n+1} - x_n = \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s)) ds
$$

$n = 2$ を代入しつつ両辺絶対値を取れば

$$
\begin{aligned}
|x_3(t) - x_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L|x_2(s) - x_1(s)| ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L(|x_2(s) - x_0| + |x_0 - x_1(s)|) ds \right| \\
&\leq \left| 2LM \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds \right| \\
&= LM|t - t_0|^2
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
|x_4(t) - x_3(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_3(s)) - f(s, x_2(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_3(s)) - f(s, x_2(s))| ds \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x_3(s) - x_2(s)| ds \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{t} LM|s - t_0|^2 ds \right| \\
&= ML^2 \frac{1}{3} |t - t_0|^3
\end{aligned}
$$

も言え，さらに繰り返すと

$$|x_5(t) - x_4(t)| \leq ML^3 \frac{1}{3 \times 4} |t - t_0|^4$$

から次が推測できる

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq ML^{n-1} \frac{2}{n!} |t - t_0|^n$$

実際，数学的帰納法を用いればこれは $n \geq 2$ で正しい

ところで，1 年前期ではまだやらないが，数列の収束についてコーシー列という考え方がある．

【コーシー列の定義】

$\forall \varepsilon, \exists (N, M) \in \mathbb{N}^2$, s.t. $[n > N, m > M] \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

実はコーシー列であればその数列が収束することが示せるのだが，その証明は 1 年後期に任せる．

今，不等式の右辺は $n \to \infty$ で強く 0 に収束するため，コーシー列であることが証明でき，関数列は収束することが分かる．

また，$|t - t_0| \leq a$ という条件があるため，関数列は t によらない共通の $\varepsilon = ML^{n-1} \frac{2}{n!} a^n$ により誤差を抑えられる一様収束を意味する．

熱心な読者のために、コーシー列であることの確認のアウトラインを書き留める。

$m \geq n$ とする

$$\begin{aligned}
|x_m(t) - x_n(t)| &= |x_m(t) - x_{m-1}(t) + x_{m-1}(t) - \cdots + x_{n-1} - x_n(t)| \\
&\leq |x_m(t) - x_{m-1}(t)| + |x_{m-1}(t) - x_{m-2}(t)| + \cdots + |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} ML^{k-1} \frac{2}{k!} |t - t_0|^k \\
&\leq \frac{2M}{L} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(La)^k}{k!} \\
&= \frac{2M}{L} \left(e^{La} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(La)^k}{k!} \right)
\end{aligned}$$

テイラーの定理より実数 c $(0 < c < La)$ を用いて次に書き換えられる

$$= \frac{2M}{L} e^c \frac{(La)^n}{n!} \leq \frac{2M}{L} e^{La} \frac{(La)^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty)$$

m に関わらずなので、$|x_m(t) - x_n(t)| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ と書き直して差し支えない。

7.2 関数列の収束先は方程式の解

漸化式を通した時，Ω にない関数が返ってくると不都合であるため，まずは Ω 内の関数 y に対して漸化式が Ω 内の関数を返す条件を考える．

$$\begin{aligned}
\inf\left(x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\right) \le x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \le \sup\left(x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\right)\\
x_0+\inf_{|t-t_0|\le a}\left(\int_{t_0}^{t}\inf\ f(s,y(s))\ ds\right) \le x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \le x_0+\sup_{|t-t_0|\le a}\left(\int_{t_0}^{t}\sup\ f(s,y(s))\ ds\right)\\
x_0+\inf_{|t-t_0|\le a}\left(\int_{t_0}^{t}-Mds\right) \le x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \le x_0+\sup_{|t-t_0|\le a}\left(\int_{t_0}^{t}Mds\right)\\
x_0-Ma \le x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \le x_0+Ma
\end{aligned}$$

$Ma \le b$ であれば条件を満たす．よって $M \le b/a$ という条件を付せば，漸化式は $\Omega \to \Omega$ の写像である．次に，漸化式を考え

$$x_{n+1}=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))ds$$

の両辺の極限を考えれば

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))ds\right)\\
x^* &= x_0+\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))ds\right)
\end{aligned}$$

一様収束なので極限と積分が交換できる*2

$$x^*=x_0+\int_{t_0}^{t}\lim_{n\to\infty} f(s,x_n(s))ds$$

f は第二引数について連続と仮定したので

$$\begin{aligned}
x^* &= x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\lim_{n\to\infty} x_n(s))ds\\
&= x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x^*)ds
\end{aligned}$$

---

*2 これは一様収束関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し数列 $\{\int_a^b f_n(x)dx\}$ が

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f_n(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx\right| \le |b-a|\varepsilon$$

と再び収束列になることより従う．

これを満たすということは，元の方程式の解であるため，$M \leq b/a$ ならば関数列は Ω 内の方程式の解に収束することが示せた．

なお，これは同時に Ω に解が存在することの証明にもなっている．

余談だが，M への条件 $M \leq b/a$ は $a \leq b/M$ や $b \geq Ma$ などのように a, b への条件と捉えることもできる．

7.3 関数列の収束先は $x_0(t)$ のとり方によらない

Ω に属する二つの関数 $a(t), b(t)$ について，$x_0(t) = a(t)$ としたときに生成する関数列を $\{a_n(t)\}$，$x_0(t) = b(t)$ としたときに生成する関数列を $\{b_n(t)\}$ とする．

前二つの結果より，$M \leq b/a$ ならば二つの関数列は微分方程式の解へと収束する．これをそれぞれ $\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} a_n(t)$，$\beta(t) = \lim_{n\to\infty} b_n(t)$ とおけば，次の二つが成り立つ．

$$\alpha(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \alpha(s))ds$$

$$\beta(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \beta(s))ds$$

差を取り，絶対値を見る．

$$\begin{aligned}
|\alpha(t) - \beta(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \{f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s))\}\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s))|\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\,|\alpha(s) - \beta(s)|\, ds \right| & &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot 2Lb|s - t_0| ds \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{s} 2b ds \right| = 2Lb|t - t_0| & &\leq 2L^2 b \left| \int_{t_0}^{s} |s - t_0| ds \right| = L^2 b|t - t_0|^2
\end{aligned}$$

勘のいい人ならもう気づくころだろうがもう少し続ける

$$\begin{aligned}
|\alpha(t) - \beta(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\,|\alpha(s) - \beta(s)|\, ds \right| & &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot \frac{1}{3} L^3 b|t - t_0|^3 ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot L^2 b|t - t_0|^2 ds \right| & &\leq \frac{1}{3 \cdot 4} L^4 b|t - t_0|^4 \\
&= \frac{1}{3} L^3 b|t - t_0|^3
\end{aligned}$$

また先ほどと同じような構図ができている．予想される式は

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha(t) - \beta(t)| \leq \frac{2b}{n!} L^n |t - t_0|^n$$

これまた数学的帰納法からこの式は正しいし，右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束している．

また $|t - t_0| \leq a$ であることから，初期値は Ω から任意に取ってきたために如何なる Ω 内の関数を初期値にしても同じ関数に収束することが証明できた．

8 結論

問題定義の項に書いた疑問である

【本題】

a, b, M, L を全て正の実数であるとし，t_0, x_0 を任意の実数であるとする．

x を t の関数であるとし，集合 Ω を C^1 級かつ $|x - x_0| \leq b$ を満たす，$|t - t_0| \leq a$ 上で定義される実関数の集合であるとする．

また，二変数関数 $f(t, x)$ は $(t, x), (t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ において次の性質を満たすとする

$$|f(t, x)| \leq M$$
$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

このとき，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

は $x \in \Omega$ において解をもつか．また，存在するならいくつ存在するか．

への解答はこうである．

【結論】

$M \leq b/a$ であるときにおいては，唯一の解が必ず存在する．