微分方程式の解の一意性

手塚，野口，秋山，田中

普段何気なく，教科書に書かれた通り微分方程式を解いて満足してはいないだろうか．

方程式を見た時，我々に求められるものは，一部の解だけ手に入れて満たされるものではないはずだ．

方程式の解は，示したもので網羅される，他にはないことを添えて初めて意味を成す．

これは微分方程式も例外ではない．

【定理】

一階微分方程式には，定義域，値域，方程式に制約を設ければ，唯一の解が必ず存在する．

一階微分方程式とは以下のようなものである

【一階微分方程式の例】

$$t^2 \frac{dx}{dt} + x = 3$$

陰関数定理等より一般に，x' について解いて，t, x の二変数関数が x' と恒等となっている方程式に書き換えられる．

また，一階微分方程式の解は任意定数を一つ含む．

これを確定させるため，x の初期条件を併記する．

【定義】

一階微分方程式を次と定義する．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t, x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

話は飛躍するが「逐次近似」と言われる手法を持ち出す

【手法】

方程式

$$x = g(x)$$

を漸化式

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

とみなしたとき，g が連続で $\lim_{n\to\infty} x_n$ が収束するならばこれは方程式の解になっている．

このように解を求める手法を**逐次近似**という．

先ほど定めた微分方程式をこの手法に当てはめ，次の条件とともに計算を行うと微分方程式が解を持ち，またそれが唯一であることが証明できる．

【要求】

今回の結論に必要な要件たち

$$|x - x_0| < a \qquad |t - t_0| < b$$
$$|f(t, x)| < M \qquad M \leq b/a$$

$$|f(t, x) - f(t, y)| < L|x - y|$$

以上の議論から得られる一意性を，**微分方程式の解の一意性**という．

コレを持って，初めて私たちは「微分方程式を解けた」と言えるであろう．