発表日 2025 年 5 月 18 日

n次元立体角における直角の定義

2025 年度 大宮祭

学籍番号　BV24044
所属　数理科学研究会
学年　2 年
氏名　古寺 爽楽

Contents

1. はじめに

以前，四元数函数について調べる中で，それを幾何学的に応用する方法を考える過程で，**立体角における等角写像**を構成できるのではないかという着想を得た．しかし実際に調べを進めると，四元数函数を用いて高次元空間における等角写像を構成することは一般には困難であることが分かった．その過程で着目したのが，立体角という概念そのものを，さらに高次元に拡張するという方向性である．すなわち，平面角（$n = 2$）や立体角（$n = 3$）を，n 次元ユークリッド空間に一般化したn 次元立体角の理論構築に関心が移ったのである．本稿では，この n 次元立体角の定義・性質・その中での直角の意味付けを明らかにすることを目的とする． なお, 本研究は明確な応用ゴールや結論を持つものではなく, **概念的拡張と理論的興味に基づく探索的な試みである**ことを最初にお断りしておく.

2. 角度

私たちは日常生活の中で**角度**という言葉に頻繁に触れているが，そこで扱われているのは主に **平面角** と呼ばれる 2 次元的な概念である．一方で，空間的な広がりを測る **立体角** や，さらに高次元に拡張された **n 次元立体角** については，その存在や意味があまり知られていないように思われる. 本章では, 角度という概念を平面から空間, さらには高次元へと拡張しながら，その本質的な構造を明らかにしていくことを目的とする.

2.1. 平面角

平面角とは，2 次元ユークリッド空間において，ある点を中心として，2 本の半直線に挟まれた扇形の開き具合を表す量のことである． この量は，扇形の大きさに関係するが，単位の取り方に依らない，**形状のみに依存した角度**を表している.

Def 2.1.1: 平面角 θ は，円の半径 r に対する円弧の長さ l を用いて，以下のように表す.

$$\theta = \frac{l}{r}$$

ここで，弧の長さが半径 r に等しいとする．このとき，

$$\theta = \frac{r}{r} = 1$$

Def 2.1.2: 弧の長さが半径と等しいときの角度 $\theta = 1$ を 1 ラジアンと定義する.

また，円全体の弧の長さは $l = 2\pi r$ であるから，

$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

よって，円周全体に対応する平面角は2πとなる．つまり，2π ラジアンが 360°に相当し，ラジアンは **無次元で自然な角度の単位**であることが分かる.

Rem: この定義は，円のスケールには依らず，扇形の開き具合＝**図形の形そのもの**に基づいている．したがって，平面角は **スケール不変** かつ **無次元量**として定義されている.

2.2. 立体角

3 次元ユークリッド空間において，ある点を中心として 3 本の半直線に挟まれた錐体の開き具合を表す量を，**立体角**という．これは平面角の拡張にあたるものであり，空間における**方向の広がり具合**を定量化するものである．

Def 2.2.1: 立体角 Ω は，半径 r の球面上で切り取られた面積 A を用いて，以下のように表す．

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

ここで，半径 r の球の全体表面積は $A = 4\pi r^2$ であるため，

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

したがって，球全体に対応する立体角の大きさは 4π となる．これは 3 次元空間における立体角の**全体量**であり，**ステラジアン（steradian）**という無次元単位で測られる．

Rem: 立体角も平面角と同様に，空間のスケールには依存せず，切り取られた**領域の形状**のみに依存して決まる． よって，立体角はスケーリングに対して不変な，**無次元の幾何量**として定義されている．

2.3. n 次元立体角

平面角および立体角は，それぞれ 2 次元・3 次元ユークリッド空間における**開き具合**を測る角度の概念である．本節では，これらを高次元空間 $\mathbb{R}^n$ に一般化した **n 次元立体角** を定義し，その導出のための基礎的な構造を確認する．

2.3.1. 幾何学的定義

n 次元立体角とは，$\mathbb{R}^n$ における原点から出るベクトルのなす領域を，単位球 S^{n-1} 上へ正規化射影することで得られる面積（測度）である． すなわち，任意の錐状領域における方向の広がりを，S^{n-1} 上の面積（測度）によって定量化したものである． これは，$n = 2$ のときには単位円 S^1 上の弧長，$n = 3$ のときには球面 S^2 上の面積に対応する．

2.3.2. 面積と体積の関係：角度を出す原理

n 次元立体角の値は，n 次元球面の表面積$S_n(r)$ を用いて表されるため，まずはそれを導くために必要となる n 次元球の体積 $V_n(r)$ を求める必要がある．一般に，半径 r の n 次元球の表面積は，その体積を r で微分することで与えられる．

Ex (低次元の場合の確認):

- $n = 2$ の場合：円の面積は $S(r) = \pi r^2$ であるため，

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$$

  これは円周の長さ，すなわち表面積に一致する．

- $n = 3$ の場合：球の体積は $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ であるため，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2$$

  これは球の表面積に一致する．

Rem: この微分は, 球の半径を微小量だけ増加させたときの体積の増加分を意味しており，幾何学的には球面上の“接面積”に対応する．このことから，体積を半径 r で微分すれば表面積が得られるという関係が成り立つ.

この関係は任意の次元に拡張可能であり，n 次元における表面積 $S_n(r)$ を得るためには， まず $V_n(r)$ を正しく導出する必要がある． 次節では，そのために必要となる積分手法と極座標変換について詳述する．

2.3.3. 円の面積と球の体積

n 次元球の体積を導出する準備として，まず 2 次元および 3 次元における円や球の体積を，それぞれ極座標系と球座標系による積分を用いて計算する．これにより，体積の導出方法が空間の次元に応じてどのように変化するかを直感的に把握でき，高次元への一般化の足がかりとなる．

- **円の場合**

半径 a の円は，極座標 (r, θ) により記述され，面積要素は $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ となる．

したがって，面積 S は次のように計算される．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^{a} r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2}a^2 \\
&= \pi a^2
\end{aligned}
$$

- **球の場合**

半径 a の球は，球座標 (r, θ, φ) により記述され，体積要素は $r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ となる．

このとき，体積 V は次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{a}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{a} r^2\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{3}a^3 \cdot 2 \cdot 2\pi \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned}
$$

このように，体積は空間の次元に応じた座標変換と，それに伴う体積要素の積分によって求められる．この積分構造は，n 次元空間における体積計算に自然に拡張できるものであり，その一般化に向けた基本的な枠組みを提供する．

2.3.4. ガンマ函数の性質

以下で n 次元球の体積を導出する際に，**ガンマ函数** を用いる必要があるため，その定義と基本的な性質について簡単に確認しておく．

Def 2.3.4.1 (ガンマ函数)：$x > 0$ に対して，ガンマ函数は以下のように定義される．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

この函数は，階乗の一般化として次の漸化式を満たす．

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

特に $\Gamma(1)$ は以下のように計算できる．

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$$

これにより，正の整数 $n \geq 1$ に対して次が成り立つ．

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

また，半整数に対しては次のような関係が知られている．

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}$$

さらに，三角函数 $\sin\theta$ とガンマ函数の間には以下のような積分公式が成り立つ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

Rem：ガンマ函数の定義と性質は，n 次元立体角を導出する際に，極座標積分の角度部分に自然に現れる $\sin^n \theta$ 型の積分の評価に欠かせないものである．また $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ という関係は，ガウス積分と呼ばれる定積分を用いることで導出され，解析学的にも非常に美しい性質のひとつである．このような性質により，ガンマ函数は階乗の連続化という以上に，多次元幾何と解析の接点を提供する基本的な特殊函数である．

2.3.5. n 次元極座標と球の表現

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における球の体積を導出するためには，n 次元極座標を用いて空間をパラメータ化する必要がある．

Def 2.3.5.1: 極座標における点の表現は，以下のn個のパラメータを用いて表される．

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= x_2\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ &\vdots \\ x_n &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{aligned}$$

ただし各パラメーターは以下を満たす．

$r\in[0,a]$：原点からの距離　$\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}\in[0,\pi]$：角度　$\theta_{n-1}\in[0,2\pi]$：最後の方位角

このとき，$\mathbb{R}^n$ における体積要素は以下のように表される．

$$\mathrm{d}V = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}$$

この体積要素を積分することで，n 次元球の体積が求められる．

2.3.6. n 次元球の体積

以下のように，半径 a の n 次元球の体積を導出することができる．

$$\begin{aligned} V_{n(a)} &= \int_0^a\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\cdots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^a r^{n-1}\,\mathrm{d}r\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_{n-1}\cdot\int_0^\pi\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\cdots\int_0^\pi\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}\theta_{n-2} \\ &= \frac{a^n}{n}\cdot 2\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}\theta_{n-2} \\ &= \frac{a^n}{n}\cdot 2\pi\cdot 2^{n-2}\prod_{k=1}^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^n}{n}\cdot 2\pi\cdot 2^{n-2}\prod_{k=1}^{n-2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \\ &= \frac{a^n}{n}\cdot 2\pi\cdot 2^{n-2}\cdot\frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{a^n}{n}\cdot 2\pi\cdot 2^{n-2}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{2^{n-2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{2a^n}{n}\cdot\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \end{aligned}$$

したがって，半径 r の n 次元球の体積は次のように表される．

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

2.3.7. n 次元球の表面積

n 次元球の表面積は，体積 $V_n(r)$ を半径 r で微分することで求められる．

$$S_n(r)=\frac{\mathrm{d}V_n(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot n\cdot r^{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot r^{n-1}$$

ここで最後の式変形では，ガンマ函数の性質

$$\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$$

を用いて，$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$ を $\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ に書き換えたものである．

また，$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ の値は，n の偶奇によって次のように場合分けされる．

- n が偶数の場合（$n=2k$）：

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\Gamma(k)=(k-1)!$$

- n が奇数の場合（$n=2k+1$）：

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot k!}\cdot\sqrt{\pi}$$

したがって，n 次元球の表面積 $S_{n(r)}$ は，n の偶奇によって次のように表される．

$$S_n(r)=\begin{cases}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\cdot r^{n-1} & (n=2k)\\ \\ \frac{2^n\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)!}\cdot r^{n-1} & (n=2k+1)\end{cases}$$

この式が円周や，球の表面積を含むことは，実際に値を代入することで容易に確認できる．

- $n=2$のとき：

$$S_2(r)=\frac{2\pi^{\frac{2}{2}}}{\left(\frac{2}{2}-1\right)!}\cdot r^{2-1}=2\pi r$$

- $n=3$のとき：

$$S_3(r)=\frac{2^3\cdot\pi^{\frac{3-1}{2}}\cdot\left(\frac{3-1}{2}\right)!}{(3-1)!}\cdot r^{2-1}=4\pi r^2$$

Rem: 特に, 単位球の場合には, $S_n(1)$ がそのまま n 次元立体角の全体量 Ω_n に一致する.

2.3.8. n 次元立体角 Ω_n

平面角や立体角の場合と同様に，n 次元立体角 Ω_n を次のように定義する．

Def 2.3.8.1: 半径 r の n 次元球の表面積 $S_n(r)$ を用いて以下のように表す．

$$\Omega_n = \frac{S_n(r)}{r^{n-1}} = \left(\frac{1}{r^{n-1}}\right) \cdot \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot r^{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

同様に, ガンマ函数の性質より, Ω_n は n の偶奇によって次のように書き分けることができる.

- n が偶数の場合（$n = 2k$）：

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!}$$

- n が奇数の場合（$n = 2k + 1$）：

$$\Omega_n = \frac{2^n \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)!}$$

この式が平面角や立体角を含むことは，具体的に代入することで容易に確認できる．

- 平面角の場合（$n = 2$）：

$$\Omega_2 = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{2}{2}}}{\left(\frac{2}{2} - 1\right)!} = \frac{2\pi}{0!} = 2\pi$$

- 立体角の場合（$n = 3$）：

$$\Omega_3 = \frac{2^3 \cdot \pi^{\frac{3-1}{2}} \cdot \left(\frac{3-1}{2}\right)!}{(3-1)!} = \frac{8 \cdot \pi \cdot 1!}{2!} = 4\pi$$

さらに，$n = 4, 5$ における全立体角の値も以下のように計算できる．

- 4 次元立体角：

$$\Omega_4 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi^2}{1!} = 2\pi^2$$

- 5 次元立体角：

$$\Omega_5 = \frac{2^5 \cdot \pi^{\frac{5-1}{2}} \cdot \left(\frac{5-1}{2}\right)!}{(5-1)!} = \frac{32 \cdot \pi^2 \cdot 2!}{4!} = \frac{8}{3}\pi^2$$

Rem: このように，Ω_n の一般公式に具体的な n を代入することで，平面角 2π や立体角 4π を含めた高次元の全立体角が一貫して求められる． 特にこの表現は，**立体角がスケールに依存せず，方向の広がり（幾何的構造）を測る普遍的な量**であることを示している．

3. 直角

一般に直角と聞くと，$90° = \frac{\pi}{2}$ の角度を指すものとして理解されている．しかし，これを立体角や n 次元立体角へと拡張するためには，より構造的・幾何学的に本質的な定義を与える必要がある．そこでまずは，平面角における直角の定義について，直感的な理解から出発し，より厳密な形式に置き換えることを考える．

3.1. 平面角の直角

平面における直角は，正方形の一つの角に見られるように，90°，すなわち $\frac{\pi}{2}$ の角度として直感的に理解される．このような **図形的な特徴に基づく理解** は自然でわかりやすいが，それを厳密な定義として用いるには，**角度の構成要素** に関する明確な基準が欠けている．

したがってここでは，直角をなす構成ベクトルの関係に注目し，次のように定義する．

Def 3.1.1: 角度をなす 2 本のベクトル u, v が互いに直交している，すなわち

$$u \cdot v = 0$$

が成り立つとき，これらがなす角度を **直角** と定義する．

この定義により，直角は単なる数値 $\frac{\pi}{2}$ ではなく，**ベクトル間の関係** に基づいた角度として捉えることができるようになる．この考え方は，3 次元の立体角や，さらに高次元の角度概念にも自然に拡張可能である．

3.2. 直角の拡張

先に定義した平面角の直角の考え方を，n 次元の立体角に拡張することを考える．まず，n 次元立体角は，原点を始点とする n 本のベクトルによって構成されているとみなせる．

Def 3.2.1: 直交する n 本のベクトルが張る錐体が，$\mathbb{R}^n$ の単位球上の測度において，n 次元立体角 Ω_n の $\frac{1}{2^n}$ を占めるとき，その立体角を **直角な立体角** と定義する．

このような定義により，n 次元空間においても**ベクトルの直交性**に基づく直角概念を導入することができる．特にこれは，$n = 2$ のときの直角の定義と完全に一致し，高次元においても一貫性を持って拡張されていることが確認できる．

3.3. 直角の具体値

前節において，n 次元立体角における直角を，ベクトルの直交性に基づいて定義した．本節では，この定義にもとづき，n 次元における **直角な立体角の大きさ** を具体的に求めることを考える．このとき，$n = 2$ の平面角における直角の直感的理解，すなわち**正方形の一つの角度**という発想が， 高次元の直角を定量化するための有効な出発点となる．

Ex (平面角における直角)：正方形には 4 つの等しい角があり，平面全体の角度が 2π であることを踏まえると，その一つ分にあたる直角の大きさは次のように求められる．

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

このように，我々が日常的に用いている**直角 $= \frac{\pi}{2}$**という認識は，図形の構造と平面角の全体量に基づいて理解されているものである．

この考え方を高次元に拡張すると，3 次元の立方体には 8 つの角があることから，n 次元立方体には2^n 個の頂点（角）が存在することが予想される．したがって，n 次元における「直角な立体角」は，全体の立体角 Ω_n を 2^n で割ったものとして表されるのが自然である．

Def 3.3.1: n 次元立体角の全体量を Ω_n としたとき，直角な立体角の大きさ$\Omega_{R,n}$は次のように定義される．

$$\Omega_{R,n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^n}$$

この定義は，$n = 2$ のときに

$$\Omega_{R,2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

を与えることから, 平面角における直角と一致しており, より高次元においても自然な拡張であると考えられる．

以下では，具体的な次元ごとの直角な立体角の大きさを計算する．

- **立体角（$n = 3$）の場合**

$$\Omega_{R,3} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot 2^3} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) \cdot 8} = \frac{\pi}{2}$$

- **4 次元立体角の場合**

$$\Omega_{R,4} = \frac{2\pi^{\frac{4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right) \cdot 2^4} = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2) \cdot 16} = \frac{2\pi^2}{1 \cdot 16} = \frac{\pi^2}{8}$$

- **5 次元立体角の場合**

$$\Omega_{R,5} = \frac{2\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot 2^5} = \frac{2\pi^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right) \cdot 32} = \frac{\pi^2}{12}$$

3.4. 直角の極限値

n 次元立体角における直角の値について，その極限$n \to \infty$のときの振る舞いを考察する．

すなわち，以下の極限を評価する．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

ここで，ガンマ函数の漸近的性質を記述するスターリングの公式を用いる．

Thm 3.4.1 (スターリングの公式): n が十分大きいとき，次の近似式が成り立つ．

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

この結果をもとに，$\Gamma(n)$ に対しても次の近似が成り立つ．

$$\Gamma(n) \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$$

ゆえに，$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ は以下のように近似できる．

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \approx \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}}$$

これを先ほどの極限に代入すると．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(e\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1} \cdot n^{\frac{n-1}{2}}}$$

ここで，分子・分母とも指数関数的に発散するが，分母 $n^{\frac{n-1}{2}}$ の増加速度の方が大きいため，極限は明らかに 0 に収束することが分かる．

よって，以下が結論される．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^n} = 0$$

この結果は，単なる数式上の極限にとどまらず，**高次元空間における幾何的構造の本質的な特徴**を反映していると考えられる．まず，この極限の構造を再確認すると，分子 $\pi^{\frac{n}{2}}$ は指数的に増加するのに対し，分母に現れる $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ や 2^n はそれを上回る速度で増加するため，全体として 0 に近づく．これはつまり，**直交的な錐体が占める割合**が高次元になるほど急激に減少していくことを意味している．

4. 終わりに

本稿では，角度という概念について平面角および立体角から出発し，それを n 次元空間へと一般化する視点で考察を行った． この過程を通じて，これまで当然のように受け入れていた**直角** の定義や意味について，あらためて構造的かつ数学的に捉え直すことができた点は，非常に有意義であった．特に，n 次元立体角における直角の大きさが，次元が増すにつれて 0 に収束するという極限結果は，**高次元空間における直感とは異なる幾何的性質**を明示するものであり，**高次元幾何の持つ本質的な困難さと奥深さ**を実感する機会となった．今後は，今回の考察を踏まえて，**立体角における等角写像が回転を除いて存在しうるのか**，あるいはそのような写像の存在条件を明らかにする方向で探究を続けたいと考えている．その際には，等角写像と深く関係する**スピン群の構造**や，それを記述するための代数的枠組みとしての **Clifford 代数**を用いることが，有効なアプローチとなる可能性があると考えている．

5. 参考文献

1. 杉浦光夫：『解析入門 I』，東京大学出版会，2003.
2. 光学用語辞典編集委員会：『立体角（ステラジアン）とは』，Optics-Words.com. https://www.optics-words.com/sokkou/steradian.html （2025 年 5 月 17 日閲覧）
3. 泰史本間：『スピン幾何学:スピノール場の数学』，森北出版，2016