ある正弦級数の収束先の決定

手塚利公、是川楓季

2025 年 5 月 18 日

目次

第 I 部

前日談

すべての始まりは、次の連続だがほとんど微分不能、しかしいくつかの微分可能点を持つ関数への考察である。

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} \tag{1}$$

グラフの形から、「π を奇数で割った点」では微分可能であろうと読み取れ、証明を試みた時の案が次である。m を奇数として[*1]

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^2 x}{k^2} \\
F'(x) &= \lim_{h\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^2(x+h) - \sin k^2(x-h)}{2k^2 h} \\
&= \lim_{h\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^2 h \cos k^2 x}{k^2 h} \qquad (2) \\
&= \lim_{h\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh \cos k^2 x}{kh} \qquad (3) \\
F\left(\frac{\pi}{m}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh}{k} \cos k^2 \frac{\pi}{m} \qquad (4) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{m-1} \cos\left(n^2 \frac{\pi}{m}\right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(mk-n)h}{mk-n} \qquad (5) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin mkh}{mk} \qquad \text{in } h \in \left(-\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{2} h\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2) から (3) の変形は、次のように証明できると期待しているが、厳密な証明には至っていない。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k^2 h}{k^2 h} - \frac{\sin kh}{kh}\right) \cos k^2 x &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k^2 h}{kh} - \frac{\sin kh}{h}\right) \cos k^2 x \int_0^{\infty} e^{-kt} dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k^2 h}{kh} - \frac{\sin kh}{h}\right) \cos k^2 x \ e^{-kt} dt
\end{aligned}$$

[*1] なお、概略を記述しただけでこれでは何の証明にもなっていないことを注記する

証明につまったので、いったん置いといて (4) の関数形

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\cos k^2\frac{\pi}{m} \tag{6}$$

に注目した。これがなかなかに面白い性質を有していることが発覚した。

第 II 部

主な結果

まず、(6) は全体として次のような形をしている

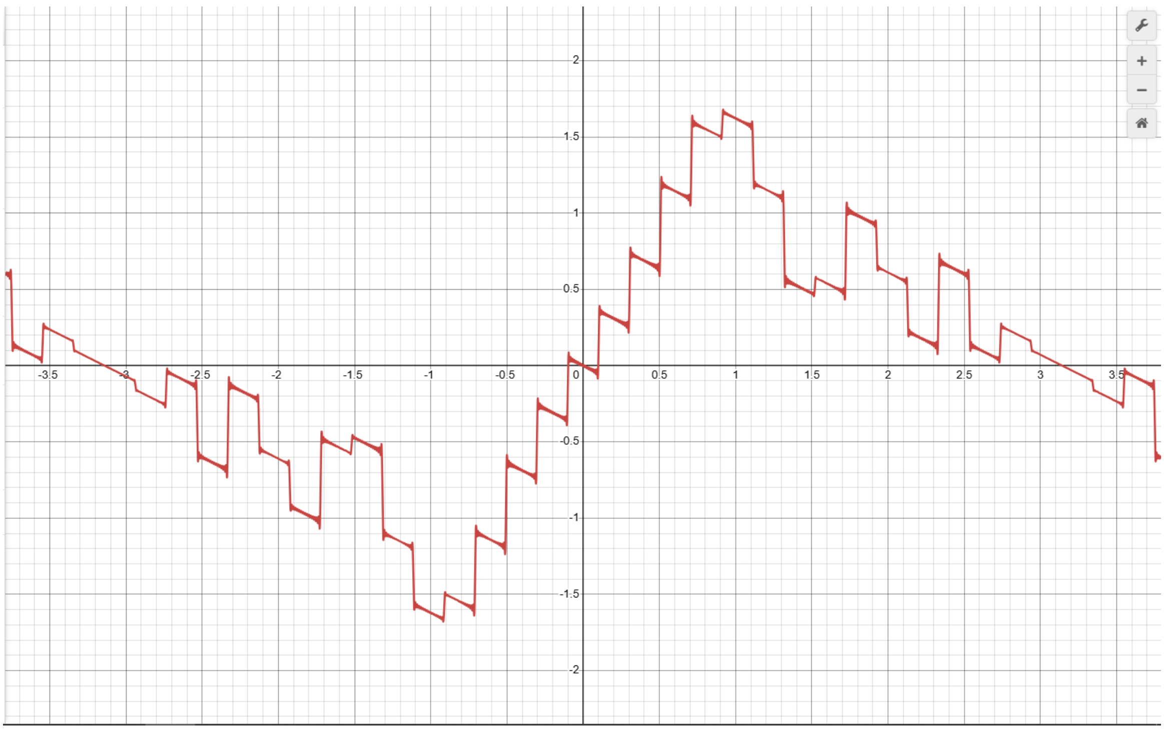

図 1　(6) の $k=500$ までの部分和 in Desmos

とても興味深いカタチをしている。また、(5) に倣って

$$\sum_{n=0}^{m-1}\cos\left(n^2\frac{\pi}{m}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(mk-n)x}{mk-n}$$

と変形し、n についてそれぞれの部分

$$\cos\left(n^2\frac{\pi}{m}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(mk-n)x}{mk-n} \tag{7}$$

について、啓示を得て次の予想を私が立てた。

【第一の予想】

m を正の奇数、n を 0 以上 m 未満の整数としたとき、二つの関数

$$f(n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(mk-n)x}{mk-n}$$
$$g(n,x)=\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\left\lfloor\frac{mx}{2\pi}+\frac{1}{2}\right\rfloor\right)$$

の間に次の関係がある

$$f(n,x)+f(m-n,x)=C(m,n)g(n,x)$$

なお、$C(m,n)$ は m,n に依存して定まる定数である。

ついで、是川楓季氏と共同で、次の予想も得た。

【定数の同定】

$$C(m,n)=\frac{\pi\cos\left(\frac{n^2\pi}{m}\right)}{m\sin\left(\frac{n\pi}{m}\right)}$$

この結果により、次のことががほぼ確実となった

【大きな結果】

正の奇数 m について

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\cos k^2\frac{\pi}{m}=\frac{\pi}{m}\left\lfloor\frac{mx}{2\pi}+\frac{1}{2}\right\rfloor-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor}\frac{\pi\cos\left(\frac{n^2\pi}{m}\right)}{m\sin\left(\frac{n\pi}{m}\right)}\sin\left(\frac{2\pi n}{m}\left\lfloor\frac{mx}{2\pi}+\frac{1}{2}\right\rfloor\right)$$

第 III 部
豊洲で発表したいこと

ここからは完全に願望となる。上記関数の m が偶数の時の表示も得ているのだが、奇数の時以上に天下り的な導出をしてしまっているため、発表には不適切極まりない。よって洗練された説明的な導出や、この関数の挙動の本質をしっかり見定めて、「証明を含めて」纏めて、発表したいと思っている。