勾配，発散，回転の関係について

BV24041 内田晴

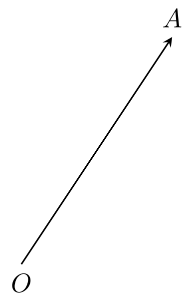
2025 年 5 月 18 日

目次

1　ベクトル解析とは

1.1　まずベクトルとは

今回考えるベクトルは，大きさと向きを持つ量のことである．



1.2　ベクトル解析とは

ベクトルの微分や積分について考える学問のこと．
力学，流体力学，電磁気学など幅広い分野に応用される学問．

2　勾配

2.1　スカラー場とは

空間のある領域内の各点 (x, y, z) において，
スカラー関数 $f(x, y, z)$ が定まっているとき，
この領域を f のスカラー場という．

2.2　勾配を考える

スカラー場を考える．
例に，なめらかな地形を考える．
地図の上で，点 P から水平 x 方向に動かし，X まで進み，
水平 y 方向に動かし，Y まで進み，点 Q に到達する．
その後，地表では点 Q から点 S まで上がる．
距離 PX, PY が小さいとし，これらを $\Delta x, \Delta y$ と書くと，
P の座標 (x, y) に対し Q の座標は $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ となる．
x 方向に Δx 進むときは y は一定に保たれるから
X における地面の高まりを $XA = h_1$ とすると，

$$h_1 = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$$

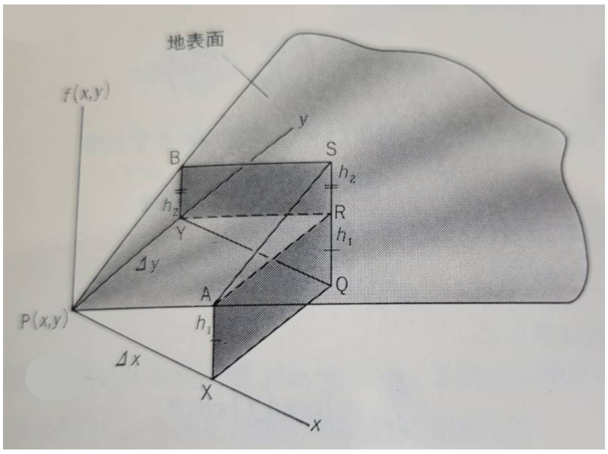


図 1　勾配のイメージ図

である．
同様に $YB = h_2$ とすると，

$$h_2 = \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$\Delta x, \Delta y$ は十分小さいとしているので，
P の近くで地表面は平面 $PASB$ とみなしてよく，
x 方向に Δx だけ進み，y 方向に Δy だけ進んで Q に達するときの高まり QS は，
XQ を AR まで上げ，YR を BS まで上げる高さ $h_1 + h_2$ に等しい．
P の高さは $f(x, y)$ であり，Q における高さは $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ であって，
その差は

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = h_1 + h_2$$

従って，P から S へ斜面の坂を登るときの高さは

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

2.3　勾配の定義

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を x, y 成分とするベクトルを**勾配** (グラジェント,gradient) と呼ぶ．
grad という文字を使い，

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

などと書き表す．

2.4 勾配の物理における例

力でスカラー場の勾配で表されるとき，
そのスカラー場をポテンシャルといい，その力を保存力という．
一般に，ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ で与えられたとき，
場所 (x, y, z) にある質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ は，

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi \quad \left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$

で与えられる．

例 2.1. 具体例① 万有引力
太陽が原点にあるとき，これからの r の距離にある
単位質量の物体 (試験体) のポテンシャルは，

$$\phi(r) = -G\frac{M}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

である．(M は太陽の質量，G は万有引力定数)
$\boldsymbol{F}$ を計算してみよう．

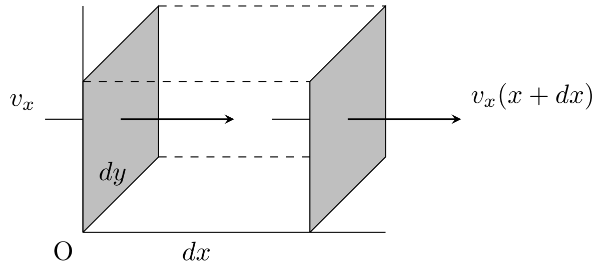
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{GM}{r^3}x \\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = \frac{GM}{r^3}y \\
\frac{\partial\phi}{\partial z} &= \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{GM}{r^3}z
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} = |-\nabla\phi| &= \sqrt{\left(\frac{GM}{r^3}x\right)^2 + \left(\frac{GM}{r^3}y\right)^2 + \left(\frac{GM}{r^3}z\right)^2} \\
&= \frac{GM}{r^3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= \frac{GM}{r^2}
\end{aligned}$$

3　発散

3.1　発散を考える



この領域内の湧出量について考える．

x 方向の速さは v_x とする．

この v_x は位置によって変化する量なので，

原点から dx だけ進んだ位置の速さは，$v_x(x+dx)$ となる．

ここで，

$$v_x(x+dx) = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx$$

となる．

なので，単位時間当たりにここから外へ出ていく量は

$$v_x(x+dx)dy - v_x dy = \frac{\partial v_x}{\partial x}dxdy$$

である．同様に，y 方向の単位時間の流出量は，$\dfrac{\partial v_y}{\partial y}dxdy$

従って，合計の流出量は，

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dxdy = q(x,y)dxdy$$

これは 3 次元でも同様なので，

流速 $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (v_x, v_y, v_z)$ とすると，

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dxdydz = q(x,y,z)dxdydz$$

となり，小さな領域 $dxdydz$ 内の水の湧出量と等しい．

3.2　発散の定義

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

と書き，これをベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散 (ダイバージェンス,divergence) という．

演算子 ∇ を用いれば，発散は，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

とかける．

4　回転

4.1　回転の定義

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ に対して，ベクトル

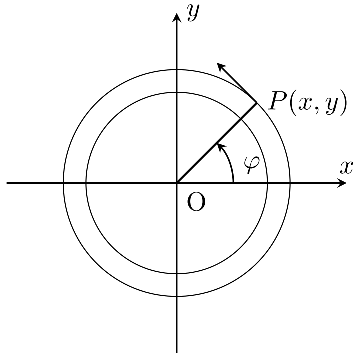
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を $\boldsymbol{A}$ の回転 (ローテイション,rotation) と呼ぶ．
これは ∇ と $\boldsymbol{A}$ の外積として書くことも出来る．すなわち，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

4.2　回転の意味：2 次元で考える

剛体が xy 面内で回転するとし，その角速度を ω として，
剛体上の点 $P(x, y)$ の速度を考える．



$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, \varphi = \omega t$ だから，
その速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ は，

$$\begin{aligned} v_x &= (r\cos\varphi)_t = -\omega r\sin\varphi = -\omega y \\ v_y &= (r\sin\varphi)_t = \omega r\cos\varphi = \omega x \end{aligned} \tag{1}$$

従って，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z}(\omega x)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial z}(\omega y)\boldsymbol{j} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega y) \right\} \boldsymbol{k} \\
&= 2\omega \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

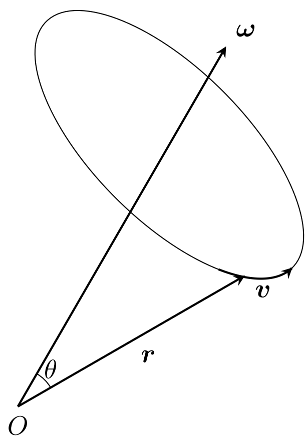
である.

4.3　3 次元で考える

剛体の 3 次元空間における回転は，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で与えられる.

実際，剛体が $\boldsymbol{\omega}$ を軸として回転するとき，点 $\boldsymbol{r}$ の速度の大きさは

$$
v = \omega r \sin\theta = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}|
$$



速度ベクトルとしては

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= (\omega_y z - \omega_z y)\boldsymbol{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\boldsymbol{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

となる.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_y z - w_z y & w_z x - w_x z & w_x y - w_y x \end{vmatrix} \\
&= 2\omega_x \boldsymbol{i} + 2\omega_y \boldsymbol{j} + 2\omega_z \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

すなわち，$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ となる.

回転の意味のまとめ

- rot$\boldsymbol{v}$ の大きさは，回転の角速度の 2 倍に等しい.
- rot$\boldsymbol{v}$ の向きは，回転軸の向きを向いている.

5 勾配，発散，回転の関係について

5.1 勾配と発散

$\phi = \phi(x, y, z)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \ \mathrm{grad}\phi &= \mathrm{div}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

ここで,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

は**ラプラス (Laplace) 演算子**，あるいは**ラプラシアン**と呼ばれる.
よって,

$$\mathrm{div}\ \ \mathrm{grad}\phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

と表すことができる.

例 5.1.

$$\nabla^2 \phi = 0$$

を**ラプラス方程式**といい，これを満たす関数を**調和関数**という.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi$$

は**波動方程式**，c は**波の速さ**である.

5.2 渦なし場

ここからは，勾配と回転について考える.
$\phi(x, y, z)$ はスカラー場とするとき，ベクトル gradϕ の回転を調べると,
まず,x 成分について考える.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot\ \ grad}\phi)_x &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

y, z 成分も同様であるから,

$$\mathrm{rot\ \ grad}\phi = \nabla \times \nabla \phi = 0$$

このことから，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ がいたるところで

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$$

を満たすとき，このベクトル場を**渦なし場**という.
また,

$$\boldsymbol{v} = -\mathrm{grad}\phi$$

であるような関数 $\phi(x, y, z)$ が存在する．この ϕ を**速度ポテンシャル**という.

例 5.2. 具体例：電場
点電荷 e による電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = K\frac{e}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

で与えられる.
x 成分のみで考える.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_x &= eK\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\right\} \\
&= eK\left(-\frac{3zy}{r^5} + \frac{3yz}{r^5}\right) = 0
\end{aligned}
$$

他の成分についても同様．したがって

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0$$

電荷が多数あっても $\boldsymbol{E}$ は加え合わされるから
$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0$ は静電場について一般に成り立つ.
したがって静電場は渦なしであり，ポテンシャル ϕ をもち一般に

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi$$

と表せる.

5.3　発散のない場

ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ がいたるところで

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

を満足するとき，これを**発散のない場**といい，適当なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{2}$$

と書ける．

$\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルという．実際 div rot を計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

となる．ベクトルポテンシャルは一義的にはきまらない．

rot grad$\phi = 0$ であるから，ある A が (2) を満たすならば,

ϕ を任意のスカラーとするとき

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\phi$$

も $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}'$ を満たすからである．

例 5.3. 具体例：回転運動

回転運動の流れ (1) は

$$\boldsymbol{v} = (-\omega y, \omega x, 0) = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

ただし,

$$\boldsymbol{A} = \left(0, 0, -\frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

と書ける．

また例えば $\phi = \dfrac{\omega}{2}(x^2 + y^2)z$ として

$$\boldsymbol{A}' = (\omega xz, \omega yz, 0)$$

とすれば $\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}'$

5.4　ヘルムホルツの定理

渦なしの場はスカラーポテンシャルの勾配で与えられ,

湧き出しのない場はベクトルポテンシャルの回転で与えられること
がわかったが，一般のベクトル場はこれらの和

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\phi$$

として与えられることが示される．これが**ヘルムホルツの定理**という．

6　参考文献

理工系数学入門コース 3　ベクトル解析　戸田盛和著